Université d'Abomey-Calavi (UAC)
Ecole Nationale d'Economie Appliquée
et de Management (ENEAM)

Année Académique 2018 - 2019
Session de Rattrapage
Août 2019

Epreuve d'Algèbre approfondie [1]

Filière : $LP2\ Stat$ **Durée : 02H00mn**

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. On considère de plus la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Déterminer le polynôme minimal de A.
   (b) Déduire le calcul de A^n d'une part en fonction de n et de $(A - I_3)$ puis d'autre part en fonction de n uniquement.
4. Montrer que $Ker(f - Id_{\mathbb{R}^3}) = vect(v_1)$ où $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$.
5. (a) Déterminer deux vecteurs v_2 et v_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(v_2) = v_1 + v_2$ et $f(v_3) = v_2 + v_3$.
   (b) Justifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Que conclure ?

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_n$ des fonctions continues sur $[a, b]$. Pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \cdots, n\}^2$, on pose $a_{ij} = \int_a^b h_i(t)h_j(t)dt$ puis pour tout $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Q(x) = \sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_ix_j$.

1. (a) Montrer par récurrence que pour pour $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} b_ib_j = (\sum\limits_{i=1}^{n} b_i)^2$.
   (b) Déduire que Q est une forme quadratique positive.
2. Ecrire la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dans le cas particulier : $\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ \forall t \in [a, b],\ h_i(t) = t^{i-1}$.

BONNE REFLEXION

1. Dr Sylvain ATTAN/LP_2 STAT/ENEAM/UAC/2018-2019
Août 2019.