ENEAM
Licence/STAT

Année Académique 2018-2019
Deuxième année

Examen d'Analyse II
SESSION DE RATTRAPAGE 2019
Durée : 01H30mn

Exercice 1

1) a- Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

converge, puis, avec le changement de variables $u = \frac{1}{t}$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0.$$

b- Soit $a > 0$. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt.$$

2) On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx$$

a- Calculer I_0 et I_1 puis montrer que la suite (I_n) converge.
b- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ puis déduire I_2, I_3 et I_4.
c- Montrer que le produit $(n+1) I_n I_{n+1}$ est constant puis calculer

$$\lim_{n\to+\infty} I_n, \ \lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} I_n\sqrt{n}.$$

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0;0) \end{cases}$$

3) a- Étudier la limite quand $(x,y) \to (0;0)$ de la restriction de f à la droite d'équation $y = ax$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$).
b-Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.

4) a- Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'équation $y = x^2$.
b- Montrer que f n'a pas de limite au point $(0;0)$.

BONNE CHANCE