ENEAM
Licence/STAT

Année Académique 2017-2018
Deuxième année

Examen d'Analyse II
SESSION NORMALE 2018
Durée : 03H

Exercice 1

(a) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

converge, puis, avec le changement de variables $u = \frac{1}{t}$, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0.$$

(b) Soit $a > 0$. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt.$$

Exercice 2

On considère les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt \ \text{ et } \ I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t) dt.$$

(a) Démontrer que I_1 converge.

(b) Vérifier que $I_1 = I_2$.

(c) Démontrer que

$$I_1 + I_2 = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + I_3.$$

(d) Vérifier que $I_3 = I_1$ puis déduire que $I_1 = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

Exercice 3

On considère la suite de fonctions f_n définie sur $[0; 2]$, pour tout entier naturel non nul n, par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n^2}\right] ; \\ -n^3 x + 2n & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n^2}, \frac{2}{n^2}\right] ; \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{n^2}, 2\right] . \end{cases}$$

(a) Vérifier que pour tout $n \geq 1$, f_n est continue sur $I = [0, 2]$.

(b) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur I vers la fonction nulle f.

(c) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur I.

(d) Vérifier que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^2 f_n(x)dx = \int_0^2 f(x)dx.$$

Exercice 4

Soit f la fonction 2π-périodique, paire et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in [0;\pi], f(t) = 1 - \frac{2t}{\pi}.$$

(a) Déterminer la série de Fourier de f.

(b) Étudier la convergence de cette série.

(c) En déduire la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Exercice 5

Soient les fonctions f et g définies respectivement, sur $\mathbb{R}^2$, par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) > 0 & \text{si } (x,y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0;0) \end{cases}$$

et $g(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$.

(a) Étudier la continuité puis la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Déterminer la différentielle de f sur $\mathbb{R}^2$.

(c) Trouver les points critiques de la fonction g et déterminer ceux qui sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selles.

Bonne chance !