

Epreuve de Topologie

Filière : Statistique

Année : 2ème année cycle 1 (cycle de licence)

Professeur : Dr KIKI Vincent Jean-Marie

Durée : 3h

I- Exercice 1

Démontrer que si A est un ensemble muni d'une relation d'équivalence R et $[a]$ la classe d'équivalence de l'élément $a \in A$, alors :

- (i) Pour tout $a \in A$, $a \in [a]$
- (ii) $[a] = [b]$ si et seulement si $\langle a, b \rangle \in R$
- (iii) Si $[a] \neq [b]$, alors les ensembles $[a]$ et $[b]$ sont disjoints.

II- Exercice 2

Considérons l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, c'est-à-dire l'ensemble des couples de nombres entiers positifs. Soit R la relation notée \cong et définie dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par : $\langle a, b \rangle \cong \langle c, d \rangle$ ssi $ad=bc$.

Démontrer que R est une relation d'équivalence.

III- Problème

3.1. Y a-t-il une différence entre "une fonction" et "une application" ? Expliquer.

3.2. Soit $X = \{a, b, c\}$ et soient $f, g \in F(X, \mathbb{R})$ deux applications définies par :

$$f = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, -1 \rangle, \langle c, 3 \rangle \},$$

$$g = \{ \langle a, -2 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 1 \rangle \}$$

Calculer :

- (i) $f+2g$
- (ii) $fg-2f$
- (iii) $f+4$
- (iv) $|f|$
- (v) f^2

3.3. Si f est une fonction définie de X vers Y , montrer que, si A et B sont deux sous-ensembles de X , alors :

(i) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(ii) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

3.4.

3.4.1. La composition des applications est-elle associative dans l'ensemble A des applications ?

3.4.2. (A, \circ) a-t-il une structure de groupe ?

3.4.3. A muni de la composition des applications et de la multiplication d'une application par un réel est-il un espace vectoriel réel ?

3.5.

3.5.1. Une racine r d'un polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ à coefficients entiers s'appelle un nombre algébrique.

Démontrer que l'ensemble A des nombres algébriques est dénombrable.

3.5.2. Démontrer que tout ensemble ouvert G du plan R^2 est une réunion de disques ouverts.

3.5.3. Démontrer que l'intersection de toute famille finie d'ouverts de R^2 est un ouvert.

3.6.

3.6.1. Soit T une topologie sur un ensemble X formée de quatre parties, c'est-à-dire de $T = \{X, \emptyset, A, B\}$ où A et B sont deux sous-ensembles propres non vides de X .

Quelles conditions doivent satisfaire A et B ?

3.6.2. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application d'un ensemble non vide X dans un espace topologique (Y, U) . De plus, soit T la famille des images réciproques des ouverts de Y :

$$T = \{ f^{-1}[G] : G \in U \}$$

Montrer que T est une topologie sur X .

FIN