Université d'Abomey-Calavi (UAC)

Faculté des Sciences et Techniques (FAST)

Département de Mathématiques

Année Acad. 2019 - 2020 | Durée: 04Heures | Filière: L1-MIA | Crédits: 06

Examen de la Session Normale: Février 2020

UE: Fonction d'une Variable Réelle

NB: Lisez bien les questions et traitez les cinq exercices. Chaque réponse doit être clairement justifiée sous peine de nullité

(Dans tous les exercices, $E(\cdot)$ désigne la fonction Partie entière)

Exercice n°1: Questions de cours

1. Enoncer puis démontrer le principe d'Archimède pour la loi $+$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit K une partie non vide de $\mathbb{R}$. On considère les propriétés suivantes:
   (P_1): K est un intervalle de $\mathbb{R}$.
   (P_2): $\forall u, v \in K, \forall \alpha \in [0;1], (1-\alpha)u + \alpha v \in K$.
   Montrer que (P_1) et (P_2) sont équivalentes.
3. Soit X et Y deux parties non vides de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que l'on a: $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.
   (b) En déduire que $\mathbb{R}^*$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant clairement votre réponse:
   (a) $\mathbb{Q}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$;
   (b) Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy admet au plus une valeur d'adhérence;
   (c) Tout point adhérent à un ensemble est un point d'accumulation de cet ensemble.

Exercice n°2

On considère les ensembles suivants:

$$A = \left\{ \frac{pq}{4p^2 + q^2} : (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\} \text{ et } B = \left\{ \mathbf{E}(\sqrt{n}) - \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \right\}.$$

1. (a) Montrer que:

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left| \frac{pq}{4p^2 + q^2} \right| \leq \frac{1}{4}.$$

(b) En déduire que $\sup A$ et $\inf A$ existent puis déterminer leurs valeurs.

2. (a) Montrer que $\sup(B)$ existe et vaut 0.
   (b) Montrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{E}(\sqrt{l^2+2l}) = l$. En déduire par la caractérisation de la borne inférieure que $\inf(B) = -1$.
   (c) B admet-il d'élément minimal? Justifier votre réponse.

Exercice n°3

On considère les suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(2k^3+5k-1)}{4k^2-1} \text{ et } y_n = \exp(-n^2+n).$$

1. (a) Prouver que pour tous entiers naturels non nuls m et n tels que $n > m$, on a:
$$|x_n - x_m| \leq \frac{1}{4m+2}.$$
   (b) i. En déduire en utilisant la définition que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
       ii. Converge-t-elle? Justifier votre réponse.

2. (a) Montrer en utilisant la définition que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (b) i. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Calculer $z_n = \mathbf{E}(y_n)$ et $z'_n = \mathbf{E}(-y_n)$.
       ii. En déduire que la fonction partie entière $\mathbf{E}(\cdot)$ n'admet pas de limite en 0.

Exercice n°4

1. On considère les fonctions f et g définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par:
$$f(x) = x\mathbf{E}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } g(x) = \exp\left[3 + \left(\frac{2}{x^2}\right)\right].$$
   (a) Montrer en utilisant la définition que: $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.
   (b) i. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
       ii. Définir son prolongement $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ puis montrer que $\tilde{f} \circ \tilde{f} = \tilde{f}$ sur $[0,1]$.

2. Soit $a \in]0;+\infty[$ et $h : [0;a] \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $[0;a]$ telle que h' soit continue sur $[0;a]$ et $h(0) = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel $c \in]0;a[$ telle que $h'(c) = \frac{2h(a)+ah'(a)}{3a}$.
   (b) **Application:** On pose $a = \frac{\pi}{2}$ et $h(x) = \sin x$. Montrer que c est unique puis calculer sa valeur.

Exercice n°5

On considère les fonctions f_1 et f_2 définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par:

$$f_1(x) = \frac{\pi}{2} + \arctan(\tan x) \text{ et } f_2(x) = 1 + \tan(\arctan x).$$

1. Donner une expression simple de f_1 sur l'ensemble $E_1 = \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
2. Donner une expression simple de f_2 sur son ensemble de définition E_2.
3. En déduire la représentation graphique de la fonction f_1 sur E_1 et celle de f_2 sur E_2.