

**UE : Convergence et Equations Différentielles (CED)**

**Filière : L1-MIA      Durée : 04 heures**

**Exercice 1** (Question du cours)

1. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$  et soit  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$  telles que pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $g(x) \geq 0$ . Montrer qu'il existe un réel  $c \in [a, b]$  tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

2. Utiliser la question précédente pour calculer les limites suivantes :

$$A = \lim_{x \rightarrow 1^+} \int_x^{x^2} \frac{\cos(\pi x)}{\ln x} dx, \quad B = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{n^2-1}^{n^2+n+1} \frac{\arctan(x^2)}{\sqrt{x}} dx.$$

**Exercice 2**

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe de  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle  $I = [a, b]$ .

1. Déterminer une fonction affine  $g$  telle que  $g(a) = f(a)$  et  $g(b) = f(b)$  puis calculer

$$\int_a^b g(x)dx.$$

2. Montrer que

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{(b-a)}{2}[f(b) + f(a)] + \frac{1}{2} \int_a^b (t-a)(t-b)f''(t)dt.$$

3. En déduire que l'erreur commise, en remplaçant  $\int_a^b f(x)dx$  par  $\int_a^b g(x)dx$ , est

majorée par  $\frac{(b-a)^3}{12} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ .

**Exercice 3**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}.$$

1. Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquelles l'intégrale  $J_n$  est convergente.

- 
- 2.(a) En remarquant que  $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ , décomposer en éléments simples la fraction  $R(x) = \frac{1}{1 + x^3}$ .
- (b) En déduire la valeur exacte de  $J_1$ .
3. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre  $J_n$  et  $J_{n+1}$  pour tout  $n \geq 1$ .
4. En déduire
- (a)  $J_2$  et  $J_3$  puis
- (b)  $J_n$  pour tout  $n \geq 1$ .

#### *Exercice 4*

On considère l'équation différentielle

(1)  $|x|y' + (x - 1)y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$

1. Déterminer les constantes réelles  $a, b$  et  $c$  pour que la fonction  $x \mapsto f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$  soit une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $x \mapsto g(x) = x^2 e^{-x}$
2. Résoudre l'équation (1) sur  $]0, +\infty[$ .
3. Résoudre l'équation (1) sur  $] -\infty, 0[$ .
4. En déduire la (ou les ) solution(s) de (1) sur  $\mathbb{R}$ .