EXAMEN DE JUIN 2019, DURÉE 4 HEURES (SESSION NORMALE)

La qualité et la rigueur de la rédaction entreront pour une grande part dans la notation des copies. Tous documents interdits.

Exercice 1. On rappelle que pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{et} \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

1. A-t-on $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$?
2. A-t-on $|\sin z| \leq 1$ et $|\cos z| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$?
3. Calculer $|\sin z|^2$ et $|\cos z|^2$ et trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = 1$.
4. Montrer que

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. (On justifiera la convergence de ces séries dans l'espace normé $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, où $|z|$ désigne le module du complexe $z \in \mathbb{C}$.)

Exercice 2.

1. Soit $z = x + iy$ avec x et y des nombres réels.
   a) Exprimer $|\sin(z)|$ à l'aide des fonctions réelles de la variable réelle sinus, cosinus, sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique en x et y.
   b) En déduire que $|sh(y)| \leq |\sin(z)| \leq ch(y)$.
   c) Montrer que les fonctions sinus et cosinus ne sont pas bornées sur $\mathbb{C}$.
2. a) Montrer que le série de fonctions complexes $\sum_n f_n$ de terme général $f_n : z \longrightarrow \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{z}{n^2}\right)$ converge absolument dans $\mathbb{C}$. On notera f la somme de la série.
   b) Montrer que cette série ne converge pas normalement sur $\mathbb{C}$ mais qu'elle converge normalement sur le disque ouvert de centre l'origine et de rayon r pour tout $r \in \mathbb{R}_+$.
   c) Justifier que f est une application continue sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3. Soit f une fonction holomorphe dans le disque $|z| < R$ avec $R > 1$.

1. Evaluer de deux façons différentes chacune des intégrales suivantes :

$$K_1 = \int_{\mathscr{C}^+} (z+1)^2 \frac{f(z)}{z^2}\, dz \quad \text{et} \quad K_2 = \int_{\mathscr{C}^+} -(z-1)^2 \frac{f(z)}{z^2}\, dz$$

où $\mathscr{C}$ est le cercle $|z| = 1$.

2. Déduire que l'on a

$$\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta\right) = 2f(0) + f'(0)$$

et

$$\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta\right) = 2f(0) - f'(0).$$

3. **Application** : Quelles sont les valeurs des intégrales

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\cos\theta} \cos(\sin(\theta))d\theta$$

et

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\cos\theta} \sin(\sin(\theta))d\theta.$$

(**Indication** : Faites un choix de fonction et appliquer les résultats de la question 2.)

Exercice 4. Evaluer, en discutant d'abord des conditions de leur existence, chacune des intégrales suivantes en utilisant la méthode des résidus tout en précisant (par un dessin) clairement les contours utilisés.

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}, \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_-. \tag{1}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\, dx, \quad \text{avec} \quad a > 0. \tag{2}$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}\, dx, \quad \text{avec} \quad a > 1. \tag{3}$$

$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{Log(x)}{x^2-1}\, dx.$$

Bonne Chance !