

### Al-khwarismi et le développement de l'algèbre

Après la conquête musulmane, à partir de 750 environ, les savants de langue arabe commencèrent à assimiler l'héritage intellectuel des civilisations précédentes, en particulier celle des anciens grecs. C'est durant cette phase que de nombreuses œuvres scientifiques, comme *l'Almageste de Ptolémée* et les *Eléments d'Euclide*, furent traduites en arabe. Grâce à des dirigeants éclairés, des centres d'érudition se constituèrent. On fit venir ainsi à Bagdad des savants de tout le Moyen-Orient (pas uniquement musulmans), et le calife Al-Mamou (au pouvoir de 809 à 833) y créa une « Maison de la Sagesse » semblable à l'ancien musée d'Alexandrie. L'un de ses membres était le mathématicien et astronome Abu Jafar Muhammad ibn-Moussa Al-Khwarismi (788 - 750).

En mathématique, Al-Khwarismi est l'auteur de deux traités qui, après avoir été traduits en latin au XII<sup>e</sup> siècle, ont eu une grande influence en Europe. L'un d'eux, dont on ne connaît pas la version latine, présentait le système de numération hindou et l'arithmétique qui s'y rattache. Ce système, qu'Al-Khwarismi exposait comme à son habitude en toutes lettres, sans utiliser de symboles, a été peu à peu adopté par les mathématiciens de langue arabe ; celui que nous utilisons aujourd'hui en est l'héritier - c'est pourquoi on parle de « chiffres arabes » (qui ne ressemble pas tellement aux chiffres utilisés de nos jours par les arabes) ou, plus correctement, de numération arabo-hindou. Par ailleurs, chez les érudits de langue latine, le calcul relatif à ce système a pris le nom d'Al-Khwarizmi, déformé en *algorismi*, puis devenu *algorithme*, terme qui désigne aujourd'hui une procédure systématique de résolution ou de calcul.

Al-Khwarizmi nous a légué un autre mot très courant, celui d'algèbre. En effet, son second traité mathématique, le plus important s'intitulait *kitab fi'l-jabr wa'l-muqabala* (« livre sur la restauration et la confrontation »). Al-jabr et al-muqabala désignent certaines manipulations faites sur des équations ; al-jabr consiste, si un membre d'une équation comporte un certain terme soustrait A, à additionner A aux deux membres de l'équation afin de faire disparaître la soustraction. Le nom de cette opération a fini par désigner l'algèbre en général, c'est-à-dire la manipulation – soumise à des règles plus ou moins machinales – d'objets mathématiques représentés par des symboles.

Le traité algébrique d'Al-Khwarizmi étudie et résout de manière systématique des équations linéaires et du second degré, classé en plusieurs types qui correspondent, dans nos notations, à  $ax = b$ ,  $ax^2 = c$ ,  $ax^2 = bx$ ,  $ax^2 + bx = c$ ,  $ax^2 = bx+c$ ,  $ax^2 + c = bx$ , avec des coefficients positifs. La résolution des équations du second degré est effectuée en complétant les carrés, pour ensuite prendre leur racine carrée (voir ci-dessous).

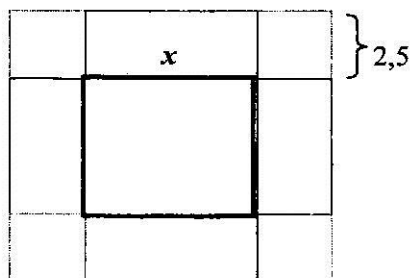
Pour les trois dernières formes, Al-Khwarizmi donne également une justification géométrique à leur résolution, ce qui témoigne de l'influence des mathématiques grecques. Le traité d'algèbre d'Al-Khwarizmi contient aussi des règles de calcul sur des expressions binomiales, ainsi que des applications à des problèmes d'héritage, la complexité des lois musulmanes en la matière ayant certainement constitué l'une des motivations de l'algèbre. Bien que relativement élémentaire, ce traité a, par sa clarté et son caractère systématique, valu à son auteur d'être parfois qualifié de père de l'algèbre.

Cette branche des mathématiques se développera ensuite et gagnera en maturité avec de nombreux mathématiciens : Abou Kamil (fin du IX<sup>e</sup> - début du X<sup>e</sup> siècle), qui n'hésite pas à traiter des équations du second degré contenant des quantités irrationnelles. Al Karagi (fin du X<sup>e</sup> - début du XI<sup>e</sup> siècle) qui étend les procédures arithmétiques aux expressions algébriques contenant une inconnue ;

### Comment Al-Khwarizmi résout $x^2 + 10x = 39$

Pour résoudre cette équation, Al-Khwarizmi complète son membre de gauche pour obtenir un carré : sa procédure dans nos notations actuelles, revient à écrire  $x^2 + 10x + 25 - 25 = 39$ , soit  $(x + 5)^2 - 25 = 39$ , qui devient  $(x + 5)^2 = 64$ , et l'on déduit que  $x + 5 = 8$  (Al-Khwarizmi ne considérait que les racines positive), d'où  $x = 3$ .

Pour justifier ce résultat géométriquement (voir la figure), il trace un carré de côté  $x$ , et accole à chacun des quatre côtés un rectangle de longueur  $x$  et de largeur 2,5 : l'aire du carré et des quatre rectangles est égale à  $x^2 + 10x$  (qui doit être égale à 39). Pour compléter la figure en un carré, il faut ajouter dans chaque coin un petit carré, de côté 2,5 et donc d'aire 6,25 unités. L'aire du grand carré complété est par conséquent  $39 + 4 * 6,25 = 64$  unités. Son côté a donc pour longueur 8 unités, d'où  $x = 8 - 2 * 2,5 = 3$  unités.



**NB** : Le symbole \* désigne la multiplication

Al-Samaw'al (XII<sup>e</sup> siècle), qui développe un symbolisme lui permettant de manipuler aisément des expressions contenant  $x$  et  $1/x$ , ou encore Al-Karagi (vers l'an 1000) qui trouve des solutions numériques à des équations du type  $ax^{2n} + bx^n = c$ , etc.

« Histoire des Sciences » de PHILIPPE DE LA COTARDIERE , pp. 45-47

#### Répondre aux questions suivantes après avoir étudié le texte :

- 1°) Indiquer deux œuvres scientifiques des anciens grecs traduites en arabe dont parle le texte.
- 2°) Pourquoi a-t-on fait venir à Bagdad des savants de tout le Moyen-Orient ?
- 3°) Expliquer l'origine du terme « algorithme » selon le texte.
- 4°) Quelle manipulation était désignée sous le terme « algèbre » ? Préciser le début de l'algèbre.
- 5°) Résumer le texte succinctement tout en conservant sa substance.
- 6°) Al-Khwarizmi avait l'habitude d'exposer en toutes lettres ses travaux, sans utiliser de symbole. Quelle réflexion vous suggère une telle pratique dans l'enseignement ou la promotion des mathématiques auprès des adolescents ?
- 7°) Pensez-vous que la démarche d'Al-Khwarizmi pour résoudre son équation ainsi que sa justification géométrique peuvent servir auprès des adolescents pour enseigner sa résolution ? En déduire le rôle de l'histoire dans la formation des mathématiciens ainsi que la promotion des mathématiques.

FIN