MIA$_2$ & PC$_2$

Année Académique : 2019 – 2020 **1er Semestre**
Examen : Mécanique du Solide
Date : Janvier 2020

Durée: 2h pour la PC$_2$ et 3h pour la MIA$_2$

On rapporte l'espace affine euclidien $\mathcal{E}_3$ à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_0(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, sauf mention contraire. L'espace vectoriel associé à $\mathcal{E}_3$ est noté E_3 et s'identifie à $\mathbb{R}^3$.

Exercice I (MIA$_2$: *3 Points*, PC$_2$: *3 Points*).
On considère les points $A(0, 1, -1)$ et $B(-1, 0, 1)$, puis les vecteurs libres $\vec{u}(1, 1, 1)$ et $\vec{v}(1, 0, 1)$.

1. i) Calculer le moment du vecteur lié $(A; \vec{u})$ au point B.
   ii) Quel est l'ensemble des points $Q \in \mathcal{E}_3$ pour lesquels les vecteurs liés $(Q; \vec{u})$ et $(A; \vec{u})$ ont même moment au point B ?
2. Calculer le moment du vecteur lié $(A; \vec{u})$ par rapport à l'axe $\Delta = \text{Supp}(B, \vec{v})$.

Exercice II. (MIA$_2$: *4 Points*, PC$_2$: *5 Points*).
Etant donné un paramètre réel λ, on considère le champ de vecteurs T_λ de $\mathcal{E}_3$ défini par :

$$\forall P(x, y, z), \quad \overrightarrow{T_\lambda}(P) = (\lambda z + \lambda + 1,\ \lambda z,\ \lambda x + \lambda y + \lambda^2 - 1)\ . \quad ,$$

1. Montrer que pour tout nombre réel λ donné, T_λ est un torseur dont on précisera la résultante $\overrightarrow{R}_\lambda$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de λ, T_λ est-il un glisseur ?
3. Quel est l'axe central de T_{-1}.
4. i) Calculer les moments de T_1 respectivement aux points $A_1(1, 1, -1)$ et $A_2(-1, 1, -1)$.
   ii) En déduire une décomposition centrale de T_1.

Exercice III (MIA$_2$: *2 Points*, PC$_2$: *3 Points*).
On considère les vecteurs mobiles

$$\begin{cases} \vec{i} &= \cos\theta\ \vec{e}_1 + \sin\theta\ \vec{e}_2, \\ \vec{j} &= -\sin\theta\ \vec{e}_1 + \cos\theta\ \vec{e}_2, \\ \vec{k} &= \vec{e}_3, \end{cases}$$

avec θ comme une fonction dérivable du temps t.

1. Déterminer et exprimer $\frac{d\vec{i}}{dt}\Big/_{\mathcal{R}_0}$, $\frac{d\vec{j}}{dt}\Big/_{\mathcal{R}_0}$ et $\frac{d\vec{k}}{dt}\Big/_{\mathcal{R}_0}$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.
2. En déduire le vecteur rotation instantanée $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$.

Exercice IV. *(*MIA$_2$*: 3 Points,* PC$_2$*: 4 Points).*

1. On considère une plaque plate homogène pleine et carrée $\mathscr{C}$, centrée en O, de support $(O; \mathrm{x}, \mathrm{y})$, de masse M et de côté de longueur a.

   Démontrer que le moment d'inertie de la plaque $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe $\Delta = \mathrm{Supp}(O; z)$ passant par O et perpendiculaire à la plaque vaut :

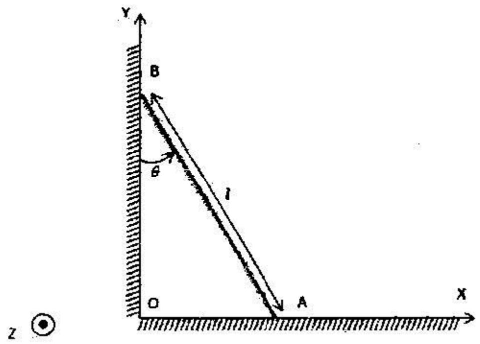
$$I_\Delta(\mathcal{S}) = \frac{Ma^2}{6}.$$

2. Une tige droite homogène $\mathcal{T}$ de masse m, de longueur L et d'épaisseur négligeagle est déposée sans vitesse initiale sur une plaque plate mince homogène de masse m et côté de longueur a, initialement en rotation uniforme dans un plan horizontal avec une vitesse angulaire ω_0 autour de son axe de symétrie vertical. Le système plaque-tige formé est tel que le centre de la tige et celui de la plaque coïncident (pratiquement).

   i) Faire le schéma du système obtenu (vu d'en haut).

   ii) Quelle est la vitesse angulaire finale ω de l'ensemble du système?

Problème I *(*MIA$_2$*: 4 Points,* PC$_2$*: 5 Points).*
Considérons une tige (échelle) homogène $[AB]$ de longueur l et de masse m dans le champ de pesanteur. La tige glisse en A sur l'axe $(O; \mathrm{x})$ et en B sur l'axe $(O; \mathrm{y})$. On pose $\theta = (\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}})$.



1. Déterminer les composantes du centre d'inertie G de $[AB]$ en fonction de θ et de l.

   En déduire le vecteur vitesse de G par rapport à $\mathcal{R}_0$.

2. Déterminer le moment d'inertie de $[AB]$ par rapport à l'axe (G, z).

3. Quelle est l'énergie cinétique de $[AB]$ par rapport au repère $\mathcal{R}_0$?

4. Quelle est l'énergie potentielle de $[AB]$?

5. En déduire une équation du mouvement.

6. On suppose qu'á l'état initial, la tige fait un angle θ_o et que son centre d'inertie est sans vitesse initial.

   Trouver alors une relation entre $\dot{\theta}$, θ et θ_o.

7. Trouver la valeur de θ pour laquelle la réaction en B s'annule.

   Interpréter le résultat.

(A suivre pour la MIA$_2$ *uniquement).*