Université d'Abomey Calavi (UAC)
Faculté des Sciences et Techniques (FAST)

Examen de Systèmes Dynamiques (rattrapage)

MIA$_2$ Promotion 2018 - 2019 Durée : 2 heures

Questions de cours

Q_1- On considère le système d'equations suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y \\ y' & = & -x \end{array}\right.$

Décrire le flot de cette équation.

Q_2- Soit a un réel donné. On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'équation différentielle donnée

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel a si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

1. toutes les solutions tendent vers 0 quand t tend vers l'infini ($t \to +\infty$)
2. toutes les solutions sont bornés pour $t \geqslant 0$.

Q_3- On donne dans $\mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs $X(t)$ de composantes

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x'(t) & = & -x(t) & & \\ y'(t) & = & -y(t) & + & x^2(t) \\ z'(t) & = & z(t) & + & x^2(t) \end{array}\right.$$

Justifier que le flot réduit du champ de vecteurs X définit un système dynamique.

Exercice

A- On considère le problème modelisé par le système suivant

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x' & = & -x^3 & - & xy^2 & - & y \\ y' & = & -y^3 & - & yx^2 & + & x \end{array}\right. \qquad (1)$$

1. Etudier le problème linearisé en $(0,0)$.
2. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $u(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ puis la résoudre. Que peut-on conclure?

B- L'analyse d'un circuit électrique RLC conduit à des équations differentielles sur $\mathbb{R}^2$ du type

$$(S) \left\{\begin{array}{l} L\dfrac{d}{dt}i = v - h(i) \\ C\dfrac{d}{dt}v = -i \end{array}\right.$$

où $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 ; les variables v, i sont respectivement un voltage et une intensité puis les constantes positives L et C une résistance et une capacité dans le circuit. L'énergie du système est $E(i,v) = \frac{1}{2}(Li^2 + Cv^2)$.

1. Déterminer l'équilibre du système (S) et discuter sa stabilité en fonction de $h'(0)$.
2. Supposons que h vérifie $xh(x) > 0$ pour $x \neq 0$. Démontrer que l'équilibre est asymptotiquement stable et déterminer son bassin d'attraction.