Licence de Mathématiques
Schémas Numériques Pour les EDO
Durée : 3 heures

Exercice 1

On considère la méthode de Runge Kutta **RK3** définie pour une équation différentielle $y' = f(t, y)$ par

$$\begin{cases} \hat{y}(t+h) = \hat{y}(t) + \frac{1}{4}(K_1 + 2K_2 + K_3) \\ K_1 = hf(t, \hat{y}(t)) \\ K_2 = hf(t + \frac{2}{3}h, \hat{y}(t) + \frac{2}{3}K_1) \\ K_3 = hf(t + \frac{2}{3}h, \hat{y}(t) - \frac{1}{3}K_1 + K_2) \end{cases}$$

Question 1

Montrer que cette méthode est précise à l'ordre 3.

Question 2

En utilisant la méthode **RK3** et une arithmétique décimale arrondie à 3 chiffres, calculer numériquement sur une grille uniforme de pas $h = 0.2$, une approximation $y(2)$, solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = 1 + \left(\frac{y}{t}\right)^2 & 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$ et $g \in C^4([a, b])$. On note $c = \dfrac{a+b}{2}$ et $d \in]a, b[\setminus\{c\}$.

Soit p_2 le polynôme d'interpolation de Lagrange de g aux points a, b et c. Soit p_3 le polynôme d'interpolation de Lagrange de g aux points a, b, c et d.

Question 1

En utilisant l'algorithme de Newton progressif, exprimer p_3 en fonction de p_2 puis comparer les intégrales $\int_a^b p_2(t)dt$ et $\int_a^b p_3(t)dt$.

Question 2

A l'aide d'une table de différences divisées calculer $\int_a^b p_2(t)dt$ en fonction de $g(a)$, $g(b)$ et $g(c)$.

Question 3

On considère le problème de Cauchy ci- dessous qui sera résolu numériquement sur une grille uniforme $(t_i)_i$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t\,,\,y(t)) & t_0 \leq t \leq t_0 + T \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

Pour un entier naturel $N \geq 2$, on va utiliser la relation

$$\begin{cases} y(t_{i+1}) &=& y(t_{i-1}) + \displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t\,,\,y(t))dt \\ t_i &=& t_0 + ih \text{ avec } h = \frac{T}{N} \end{cases}$$

Pour un entier $i \geq 1$ et le réel ϵ vérifiant $0 < |\epsilon| < 1$, on considère les 4 points distincts t_{i-1}, t_i, t_{i+1} et $t_\epsilon = t_i + \epsilon h$ auxquels on associe respectivement

$$\begin{cases} f_{i-1} &=& f(t_{i-1}\,,\,y(t_{i-1})) \\ f_i &=& f(t_i\,,\,y(t_i)) \\ f_{i+1} &=& f(t_{i+1}\,,\,y(t_{i+1})) \\ f_\epsilon &=& f(t_\epsilon\,,\,y(t_\epsilon)) \end{cases}$$

Soit $P_\epsilon(t)$ l'interpolant de Lagrange de $f(t\,,\,y(t))$ associé à ces 4 points distincts et $R_\epsilon(t)$ l'erreur commis au point $t \in [t_{i-1}\,,\,t_{i+1}]$.

Question i

En utilisant les questions 1 et 2 exprimer $\displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} P_\epsilon(t)dt$ en fonction de f_{i-1}, f_i et f_{i+1}.

Question ii

Calculer $\displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} R_\epsilon(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} R_\epsilon(t)dt$

Question 4

Sachant que $y'(t) = f(t\,,\,y(t))$ utiliser la question 3, pour exprimer en fonction de h, f_{i-1}, f_i, f_{i+1} et , $y^{(5)}$, la relation

$$y(t_{i+1}) = y(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t\,,\,y(t))dt$$