Université d'Abomey-Calavi
Faculté des Sciences et Techniques

Année Académique 2017 - 2018
L3-MIA

Examen (Rattrapage) de Théorie des Graphes

Durée: 3 heures

Toute réponse doit être soigneusement justifiée sous peine de nullité.

Exercice 1

1. Soient (W_1, W_2) et (W_3, W_4) deux partitions d'un ensemble H.
   Prouver qu'il existe $(a, b) \in W_1 \times W_2$ tel que $(a, b) \in W_3 \times W_4$ ou $(a, b) \in W_4 \times W_3$.
2. En déduire que le graphe biparti complet $K_{q,m}$ est connexe.
3. Déterminer tous les couples (q, m) tels que $K_{q,m}$ soit un arbre.

Exercice 2

Soit $G = (V, E)$ un multigraphe non orienté. On pose $n = |V|$, et $m = |E|$.
Soit p le nombre de composantes connexes de G.
On définit le nombre cyclomatique de G par :

$$\nu(G) = m - n + p$$

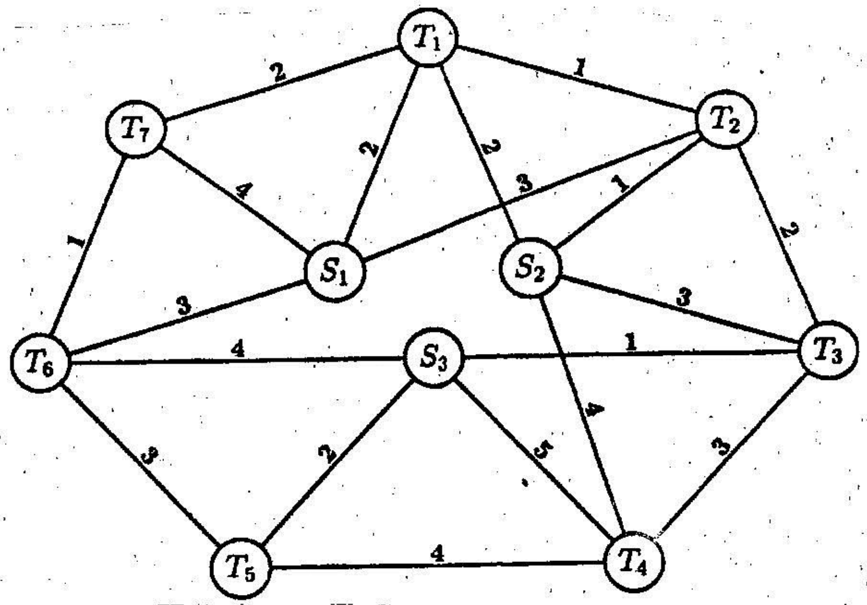
1. Démontrer que si G est connexe alors $m \geq n - 1$.
2. En déduire que G $\nu(G) \geq 0$.
3. Prouver que $\nu(G) = 0$ si et seulement si G est acyclique.

Exercice 3

1. Prouver qu'un multigraphe hamiltonien ne contient pas de sommet de degré 1.
2. On dit qu'un sommet v d'un multigraphe connexe H est un sommet d'articulation si $H - v$ n'est pas connexe.
   (a) Démontrer que tout arbre d'ordre supérieur ou égal à 3 admet un sommet d'articulation.
   (b) Prouver que si un multigraphe connexe est hamiltonien alors il n'a pas de sommet d'articulation. On utilisera un raisonnement par contraposée.
3. Un graphe simple $G = (V, E)$ est dit hypo-hamiltonien lorsqu'il n'est pas hamiltonien et si pour tout sommet v de G , $G - v$ est hamiltonien.
   Soit G un graphe simple hypo-hamiltonien.
   (a) Prouver que G est connexe.
   (b) Prouver que pour tout $v \in V$, on a : $deg(v) \geq 3$

Exercice 4

1. On cherche à construire une achitecture en réseau où les terminaux clients sont reliés à des serveurs. Le cablage utilisé fait appel à une technologie très avancée et très coûteuse. L'achitecture doit être conçue de façon à minimiser le coût de cablage.
   De façon générale, on note t le nombre de terminaux et s le nombre de serveurs. Les liaisons envisageables entre les terminaux et serveurs ainsi que les coûts de cablages correspondants (exprimés en milliers d'euros) sont représentés par un graphe valué G.
   Afin de tester les approches envisagées, on s'appuiera sur un exemple comportant 7 terminaux et 3 serveurs que l'on peut connecter selon le graphe G_1 représenté par la figure suivante:



   On suppose que tout terminal doit être relié de façon directe ou indirecte (c'est-à-dire à travers d'autres terminaux ou d'autres serveurs) à tout serveur.

   (a) Que peut-on rechercher sur G? Exprimer en fonction de s et de t le nombre de liaisons à réaliser.

   (b) On considère l'exemple illustratif représenté par le graphe G_1. Déterminer, en utilisant un algorithme approprié, une solution optimale et le coût correspondant.

2. En fait, le concepteur du réseau souhaite, pour des raisons économiques, étudier des achitectures où chaque terminal ne serait relié, de façon directe ou indirecte à un et un seul serveur. Exprimer en fonction de s et t :

   (a) le nombre de composantes connexes du réseau à constituer;

   (b) le nombre de liaisons à réaliser (on utilisera le nombre cyclomatique de l' Exercie 2)