

Examen de Théorie des Graphes

Durée: 3 heures

Toute réponse doit être soigneusement justifiée sous peine de nullité.

Questions de cours

1. Démontrer que tout multigraphe de degré minimum supérieur ou égal à 2 contient un cycle élémentaire.
2. Démontrer que tout multigraphe d'ordre n dont le nombre d'arêtes est $m = n - 1$ est arbre.
3. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice d'adjacence d'un multigraphe \mathcal{G} d'ordre n . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, en posant $A^k = (a_{ij}^{(k)})_{1 \leq i, j \leq n}$, démontrer que le nombre de k -chaîne de sommet initial v_i et de sommet final v_j est $a_{ij}^{(k)}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $V(\mathcal{G}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Exercice 1

Soient $G = (V, E)$ un multigraphe.

1. Prouver que si G est d'ordre supérieur ou égal 2 et connexe alors G possède un sommet u tel que $G - u$ reste connexe.
2. Démontrer que si $|E| \geq n$ alors G contient au moins un cycle.
3. On suppose que G un graphe simple connexe ayant m arêtes et n sommets v_1, v_2, \dots, v_n .

On pose $\delta = \frac{\sum_{i=1}^n d(v_i)}{n}$ (la moyenne des degrés)
et on suppose que $\delta > 2$.

- (a) Prouver que $m > n$.
- (b) Prouver que alors G contient au moins deux cycles.

Exercice 2

On se propose de démontrer que l'assertion suivante est vraie

Étant donné n entiers naturels non nuls $d_1, d_2, \dots, d_n, n \geq 2$ il existe un arbre à n sommets tel que (d_1, d_2, \dots, d_n) soit la liste des degrés de ses sommets si et seulement si

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2 \tag{1}$$

1. Prouver que la condition est nécessaire.
2. Prouver que la condition est suffisante pour $n \in \{2, 3\}$.
3. Soit d_1, d_2, \dots, d_n, n entiers naturels non nuls vérifiant (1) avec $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n, (n \geq 3)$.
Prouver $d_1 \geq 2$ et $d_n = 1$.
4. Démontrer par récurrence que la condition est suffisante.