



EXAMEN DE FÉVRIER 2020, DURÉE 3 HEURES (SESSION NORMALE)

La qualité et la rigueur de la rédaction entreront pour une grande part dans la notation des copies. Tous documents interdits.

Exercice 1. (Questions de cours)

1. Soit A une partie non vide de \mathbb{R} .
 - a) Donner la définition de borne inférieure de A , notée $\inf A$.
 - b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\inf A$ existe dans \mathbb{R} .
 - c) Si A admet m comme borne inférieure, a-t-on nécessairement $m \in A$? (Justifier votre réponse en donnant un exemple ou un contre-exemple.)
2. Énoncer les théorèmes suivants :
 - a) Théorème des accroissements finis.
 - b) Théorème de Rolle.

Exercice 2. Soit $a > 0$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n - a)^2}{4u_n^2}$.
2. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$, puis que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{a}$.
4. **Application :** Trouver la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$v_0 = 1 \quad \text{et} \quad v_n v_{n-1} = \frac{1}{2} v_n^2 + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 3. On considère la fonction donnée par $f(x) = \arcsin \left(\frac{x}{2-x} \right)$.

1. Montrer que le domaine de définition de f est $] -\infty, 1]$.
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Déterminer le domaine de dérivabilité de f et donner la fonction dérivée f' .
4. a) Donner le développement limité de la fonction $g(x) = \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ au point $x_0 = 0$ et à l'ordre 2.
b) En déduire le développement limité de f au point $x_0 = 0$ et à l'ordre 3.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \quad y' = -\frac{1}{x}y + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \text{avec } x \in]0, +\infty[.$$

1. Montrer que la fonction φ définie pour tout $x \in]0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ est une solution de l'équation différentielle (E) .
2. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle (E) .
3. Trouver la solution h de l'équation différentielle (E) vérifiant $h(1) = \sqrt{2} - 1$.
4. Montrer que la fonction h se prolonge par continuité à droite en 0.

Bonne Chance !