

NB Aucun document n'est autorisé**Exercice 1 : Applications au calcul d'intégrales.**

Calculer les intégrales suivantes :

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta \quad \text{où } a \text{ est réel avec } |a| < 1 ; \quad L = \int_a^{+\infty} \exp(2ax - x^2) dx ;$$

$$M = \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^4 dx ; \quad K = \int_0^1 \left[\ln \left(\frac{1}{x} \right) \right]^{a-1} dx \quad \text{avec } a > 0$$

Exercice 2 : Transformation de Laplace

- 1- Résoudre à l'aide de la transformation de Laplace l'équation différentielle suivante:

$$x'' - 4x' + 5x = 2e^{2t} (\sin t + \cos t) \quad \text{avec } x(0) = 1 ; x'(0) = 2$$

- 2- Trouver la solution du système d'équations différentielles suivant par la

$$\text{transformation de Laplace : } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + y + 5 \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y - 37t \end{cases} \quad \text{avec les conditions}$$

initiales $x(0) = 0, y(0) = 0$.

Exercice 3 : Résolution des équations différentielles à l'aide de séries et Equations de Bessel

- 1) Trouver la solution de l'équation : $y'' - xy' - 2y = 0$ sous forme d'une série entière.
- 2) Ramener l'équation suivante à l'équation de Bessel puis la résoudre par la méthode des équations déterminantes :

$$x^2 y'' + x y' + \left(4x^2 - \frac{1}{9} \right) y = 0$$

- 3) Ramener l'équation suivante à l'équation de Bessel puis trouver sa solution générale : $x^2 y'' - 2x y' + 4(x^4 - 1)y = 0$

