



**UNIVERSITE D'ABOMEY-CALAVI (UAC)**

**ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR (ED-SDI)**

\*\*\*\*\*

**MASTER DE RECHERCHE EN Génie des Matériaux et Structures**

**Rapport de stage**

**Thème :**

**ANALYSE DU COMPORTEMENT MECANIQUE D'UNE POUTRE  
SANDWICH EN MATERIAUX COMPOSITES ANISOTROPES SOUS  
CHARGEMENT STATIQUE**

**Présenté par :**

**Damien Paul AMADJI**

Ingénieur de conception en Génie-civil

**Encadrement :**

**Dr Valery K. DOKO**

*Enseignant-chercheur à l'EPAC/UAC*

**Sous la direction de :**

**Ir. Ph.D OLODO E.T. Emmanuel**

*Maître de conférences des Universités CAMES*

*Enseignant-chercheur à l'EPAC/UAC*

**Année Académique 2015-2016**

## DEDICACES

- ♣ *Au tout puissant qui spécialement m'a permis d'être aux côtés de ma famille.*
- ♣ *A ma chérie Brigitte HOUINSOU-HOUSSOU sans qui je ne pouvais faire ce travail.*
- ♣ *A ma fille Brénice Virgiane Yélignan qui me permet d'être toujours ambitieux.*
- ♣ *A ma maman et à mon feu père.*
- ♣ *A mes frères et sœurs pour leurs encouragements ainsi qu'à toute ma famille et amis.*

## REMERCIEMENTS

*Je tiens à remercier sincèrement avec un cœur enthousiaste :*

- + L'Architecte de l'univers, Dieu le tout Puissant pour avoir été tout pour moi dans l'élaboration de ce travail.*
- + Le Professeur titulaire Antoine VIANOU, Dr. Ing. & Dr. Es Sc , Directeur de l'école doctorale des sciences de l'ingénieur*
- + Dr OLODO E.T. Emmanuel, Maître de conférences des universités, mon encadreur, pour sa disponibilité, son encouragement et ses conseils en vue de l'aboutissement de ce travail.*
- + Le Professeur Edmond ADJOVI, Professeur titulaire des Universités du CAMES. Il a consacré beaucoup de temps, et a largement contribué à l'aboutissement de mes travaux de recherche par la qualité de ses suggestions.*
- + Le Docteur Valéry K. DOKO, Enseignant chercheur en génie-civil, pour ses conseils judicieux, ses suggestions pertinentes et son support constant qui m'ont énormément aidé à la réalisation de ce travail.*
- + Le Professeur Gérard GBAGUIDI, Maître de conférences des universités, le coordonnateur de notre formation pour les chaleureux conseils et le soutien accordé.*
- + Tous les professeurs du Master de recherche du génie des matériaux et structures, pour avoir partagé leurs connaissances, leurs expériences et l'enthousiasme dans le déroulement des cours.*
- + Tous les collègues ingénieurs, ayant faits leurs travaux de recherche dans la même équipe de recherche.*

## RESUME

Ce travail est consacré à l'analyse du comportement mécanique d'une poutre sandwich en matériaux composites anisotrope sous chargement statique.

La poutre sandwich qui fait l'objet de notre étude est constituée d'une âme en polystyrène de 10 mm d'épaisseur et de deux peaux composées de 10 plis d'épaisseur 0.125 mm et d'une séquence d'empilement de  $[90^\circ, 0^\circ]_5$  pour les deux peaux.

Pour appréhender les propriétés mécaniques en vue d'analyser le comportement de la poutre sandwich, nous avons déterminé le module d'Young ou le coefficient d'élasticité, la flèche maximale, de même que l'état de contrainte au centre de la poutre dans les deux modes de sollicitation, c'est-à-dire en flexion 3-points et 4-points. Les principaux résultats obtenus nous révèlent que la valeur de la flèche au centre de la poutre sandwich en flexion 4-points est inférieure à celle en flexion en 3-points. L'évaluation du module d'Young dans les deux cas donne la même valeur. L'état de contrainte déterminé dans les deux modes de sollicitation montre clairement l'anisotropie de la poutre. Les semelles de la poutre sandwich sont en plaques orthotropes stratifiées. La plus grande valeur de la contrainte suivant l'axe (yy) en flexion 3-points est très inférieure à celle en flexion 4-points mais toutes positives.

Les contraintes tangentielles dans les deux cas sont nulles.

Mots clés : composite, poutre Sandwich, anisotrope, flexion 3-points, flexion 4-points.

## **ABSTRACT**

This work is devoted to the analysis of the mechanical behavior of a sandwich beam of anisotropic composite materials under static loading. The sandwich beam which is the subject of our study consists of a polystyrene core 10 mm thick and two skins composed of 10 plies of thickness 0.125 mm and a stacking sequence of  $[90^\circ, 0^\circ]_5$  for the two skins. In order to analyze the behavior of the sandwich beam, we have determined the Young's modulus or the elasticity coefficient, the maximum boom, as well as the stress state at the center of the beam in The two modes of biasing, that is to say in 3-point and 4-point flexion. The main results reveal that the value of the arrow at the center of the 4-point bending sandwich beam is lower than that of the 3-point bending. The evaluation of the Young's modulus in both cases gives the same value. The state of stress determined in the two stressing modes clearly shows the anisotropy of the beam. The soles of the sandwich beam are in laminated orthotropic plates. The greatest value of the stress along the axis ( $y$ ) in 3-point flexion is much less than that in 4-point bending but all positive. The tangential stresses in both cases are zero.

Key words : composite, sandwich beam, anisotropic, 3-point bending, 4-point bending.

## TABLE DES MATIERES

DEDICACES _____	i
REMERCIEMENTS _____	ii
RESUME _____	iii
ABSTRACT _____	iv
TABLE DES MATIERES _____	v
LISTE DES FIGURES _____	vii
0. Problématique sur les structures sandwiches _____	1
I. INTRODUCTION GENERALE _____	1
I.1 Objectifs généraux de l'étude _____	2
I.2 Objectifs spécifiques _____	2
I.3 Méthodologie _____	2
I.4 Résultats attendus _____	3
II. REVUE DE LITERATURE _____	4
II.1 Approche macroscopique _____	4
II.1.1 Généralité sur les composites _____	4
II.1.2 Architecture des matériaux composites _____	5
II.1.3 Structure sandwich _____	6
II.1.4 Analyse des travaux sur le comportement des matériaux sandwichs _____	11
II.1.5 Analyse à l'aide de la théorie des plaques sandwichs _____	12
II.1.6 Mode d'endommagement et ruine des structures sandwichs _____	13
II.1.6.1 Flambement généralisé des peaux _____	14
II.1.7 Définition d'une poutre composite : _____	16
II.1.8 Comportement en flexion des poutres composites sans considération de l'effet du cisaillement transverse _____	16
II.2 Approche microscopique (homogénéisation) _____	20
III. Loi de Hooke pour un solide anisotrope _____	23
III.1.1 Signification physique des composantes élastiques _____	25
III.1.2 Les différentes symétries élastiques _____	27
III.1.3 Les constantes techniques d'élasticité _____	32

IV.	La loi fondamentale des stratifiés	34
IV.1	Les équations d'équilibre d'un stratifié	38
IV.2	Loi de comportement d'un matériau composite stratifié :	38
IV.2.1	Comportement en membrane :	38
IV.2.2	Comportement en flexion et torsion :	41
V.	Application à une poutre sandwich	44
V.1	Calcul en flexion 3 trois points	45
V.2	Calcul en flexion 4 points	48
V.3	Analyse des résultats	52
	CONCLUSION	54
	Références bibliographiques	55

## LISTE DES FIGURE

<b>Figure II-1</b> pli à renforcement unidirectionnel .....	5
<b>Figure II-2</b> : constitution d'un stratifié .....	6
<b>Figure II-3</b> : les différents constituants d'une structure sandwich (ELRAOUG. A., 2008) .....	7
<b>Figure II-4</b> : Matériaux pour sandwich (Mir, Octobre, 2011).....	8
<b>Figure II-5</b> : structure sandwich en bois de balsa et peaux en stratifié.....	9
<b>Figure II-6</b> : L'âme de Mousse .....	10
<b>Figure II-7</b> : âme en Nid d'abeilles. ....	10
<b>Figure II-8</b> : Différentes sollicitations appliquées sur un sandwich .....	14
<i>Figure II-9</i> : Mode de ruine par « flambement généralisé » des peaux du sandwich. ....	14
<i>Figure II-10</i> : Mode de ruine par flambement généralisé « general buckling » de l'âme du sandwich (OUADDAY, 2003) .....	15
<i>Figure II-11</i> : Mode de rupture par cisaillement de l'âme. ....	15
<i>Figure II-12</i> : Observations macroscopique des faciès de rupture du sandwich .....	16
<b>Figure II-13</b> : Exemple d'une poutre composite en I (Mir, Octobre, 2011) .	16
<b>Figure II-14</b> : cas d'une poutre simple .....	17
<b>Figure II-15</b> cas d'une poutre en console .....	18
<b>Figure II-16</b> cas d'une poutre avec porte-à-faux.....	18
<b>Figure II-17</b> : cas d'une poutre Encastrée et supportée .....	18
<b>Figure II-18</b> cas d'une poutre continue .....	18
<b>Figure II-19</b> : cas d'une poutre à double encastrement.....	19
<b>Figure II-20</b> : Elément poutre .....	20
<b>Figure II-21</b> volume élémentaire représentatif.....	22
<b>Figure IV-1</b> : Efforts de membrane appliquées sur un stratifié .....	39
<b>Figure IV-2</b> : Géométrie des N-couches du stratifié.....	39
<b>Figure IV-3</b> : schématisation des moments de flexion et de torsion .....	42
<b>Figure IV-4</b> : schématisation des résultantes en cisaillement .....	42
<b>Figure V-1</b> : structure de la poutre sandwich en peaux stratifiées.....	44

**Figure V-2** : photographie d'une âme en polystyrène ..... 45

**Figure V-3** : schéma statique de la poutre sandwich en flexion 3-points ... 45

**Figure V-4** : schéma statique de la poutre sandwich en flexion 4-points ... 48

## **0. Problématique sur les structures sandwiches**

Les matériaux sandwiches connaissent un essor important, tant dans les applications les utilisant, que dans les technologies les mettant en œuvre. Ils présentent un intérêt pour les applications qui requièrent à la fois rigidité et légèreté, notamment les transports, la marine, le nautisme, l'aéronautique, l'aérospatial, les sports et loisirs, l'industrie lourde, le génie civil et l'armée. L'objet de ce présent travail est d'analyser le comportement mécanique en statique, des matériaux sandwiches en présence d'une décohésion de longueur variable. Ce travail se plaçait dans la continuité des travaux déjà réalisés au sein du laboratoire, sur l'analyse du comportement en statique, des matériaux composites sandwichs anisotropes.

## **I. INTRODUCTION GENERALE**

Les matériaux stratifiés ou sandwiches sont des matériaux à hautes performances mécaniques, façonnables à la libre volonté du concepteur. Les matériaux sandwiches en occurrence sont constitués d'une âme, souvent épaisse et de faible masse volumique, enserrée entre deux peaux à la fois rigides et minces.

Du fait que l'on peut modifier la nature des matériaux constitutifs d'âme et de la peau (densité, propriétés mécaniques, physiques et chimiques), il est possible de concevoir des structures adaptées aux applications bien définies. C'est justement ce qui nous a poussé à ce thème pour mieux appréhender les avantages et les inconvénients des matériaux sandwichs anisotropes dans l'application des poutres en génie civil. De nombreux travaux de recherche ont traité le comportement mécanique des poutres composites stratifiées tel que Bezazi et al. (BEZAZI 2001) qui ont réussi à mettre en évidence l'influence du type de renfort sur les valeurs de la charge et du comportement mécanique sous chargement statique en flexion 3-points de ces stratifiés croisés constitués de fibres de verre

Lors de la sollicitation en flexion des matériaux sandwiches, la décohésion (décollement) entre la peau et l'âme est l'un des modes d'endommagement observé

par de nombreux chercheurs dans le cas des essais de flexion. Cet endommagement peut aussi survenir à la suite des imperfections dans le processus de fabrication, le dégazage de l'âme en mousse sous l'exposition directe du soleil, soit résulter des charges externes au cours de la vie d'opération, comme l'impact par des objets étrangers, soit encore résulter par la capacité d'absorption d'eau des âmes cellulaires. Ces modes d'endommagement peuvent interagir entre eux et aboutir à une défaillance prématurée de la structure en matériau. Notre travail consiste à maîtriser les paramètres permettant d'analyser le comportement mécanique des structures sandwiches soumises à la flexion 3-points d'une part et à la flexion 4-points d'autre part. Cette étude est réalisée sur des poutres en matériaux composites sandwiches dont les semelles sont en composites stratifiés constituées de cinq (05) plis pour chaque semelle entre lesquelles se trouve une âme isotrope. En outre, un état des lieux sur les travaux portant sur une approche macroscopique et sur une approche microscopique a fait objet de notre revue bibliographique.

### **I.1 Objectifs généraux de l'étude**

C'est de maîtriser les mécanismes nécessaires à l'analyse du comportement des poutres sandwiches sous sollicitations statiques.

### **I.2 Objectifs spécifiques**

Pour aboutir à cet objectif, il faut faire une :

- ✓ Analyse macroscopique des composites orthotropes ;
- ✓ Analyse microscopique des composites orthotropes ;
- ✓ Analyse et méthodes de représentation des matériaux anisotropes.

### **I.3 Méthodologie**

La démarche scientifique du présent travail se décline aux étapes suivantes :

- ☞ effectuer une revue bibliographique (articles, thèses, livres, etc.) relative aux matériaux composites anisotropes ;
- ☞ procéder à une étude de la loi de Hooke pour un solide anisotrope ;
- ☞ procéder à une étude fondamentale des stratifiés ;
- ☞ établir des équations d'équilibre d'un stratifié.

## I.4 Résultats attendus

☞ Application à une poutre sandwich :

- Semelles orthotropes ;
- Ame isotrope
- Analyse et calcul en flexion 3-points
- Analyse et calcul en flexion 4-points.

## II. REVUE DE LITERATURE

Une revue bibliographique sur les matériaux composites en construction sandwich est présentée dans ce chapitre. Cette revue débutera avec une exposition plutôt générale des matériaux composites dits anisotropes par la suite une structure sandwich.

### II.1 Approche macroscopique

#### II.1.1 Généralité sur les composites

Contrairement aux matières premières classiques dont on connaît à l'avance les caractéristiques mécaniques, celles des composites ne sont réellement connues qu'après fabrication, car on réalise, en même temps, le matériau et le produit. Actuellement, les composites à matrice organique représentant la majorité des composites. Une définition générale d'un matériau composite est donnée par Berthelot «Un matériau composite est constitué de l'assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles et de nature différente, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément».

L'analyse du comportement des matériaux composites et la prévision de leurs propriétés vont faire intervenir les caractéristiques de la matrice, celles des fibres, des problèmes d'interface et des conditions de fabrication. En effet, les propriétés mécaniques des composites sont très dépendantes des fibres employées : nature, répartition, taux, longueurs, diamètres, ensimages...

- **Renfort :**

Ce sont des particules d'environ 50 microns de diamètre. Il existe des renforts fibres courtes, des renforts fibres moyennes ou mi-longue (de l'ordre du cm) et des renforts fibres longues (où les fibres font environ la taille de l'échantillon). Il représente l'armature, squelette, il assure la tenue mécanique (rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc...). Les fibres les plus utilisées dans l'industrie sont souvent :

- **fibres de verre** obtenu à partir de silice et d'additifs. Le verre est coulé en fusion à 1500°C à travers une filière en platine-rhodium ; après

refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues de 2 à 20 mm. Suivant l'application auxquelles elles sont destinées, les fibres de verre sont réparties en trois qualités.

- **Fibre E** pour les composites grandes diffusions(GD) ;
- **Fibre D** pour les applications dans la construction électrique ;
- **Fibre R** pour les composites hautes performances (HP).

Les fibres de verre constituent le principal renfort, utilisé dans plus de 90/100 des matériaux composites, et plus particulièrement pour les produits de grande diffusion (GD). Elles offrent, pour un prix raisonnable (CHATAIN 2001) :

- une bonne adhérence entre fibres et résines (matrices) ;
- de bonnes propriétés mécaniques, mais inférieures à celles de la fibre de carbone ;
- des propriétés d'isolation électrique acceptables pour la plupart des applications.

## II.1.2 Architecture des matériaux composites

### II.1.2.1 Monocouches :

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibre tissées, à fibres courtes. (BERTHELOT 2005)

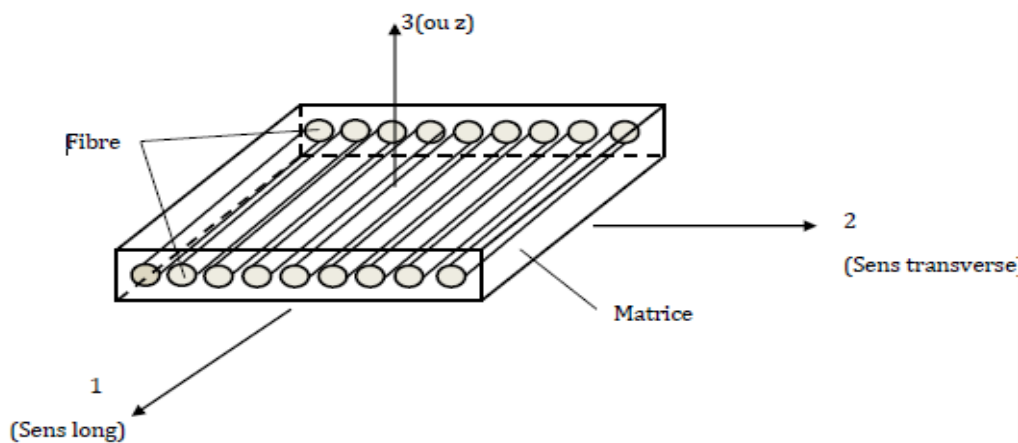


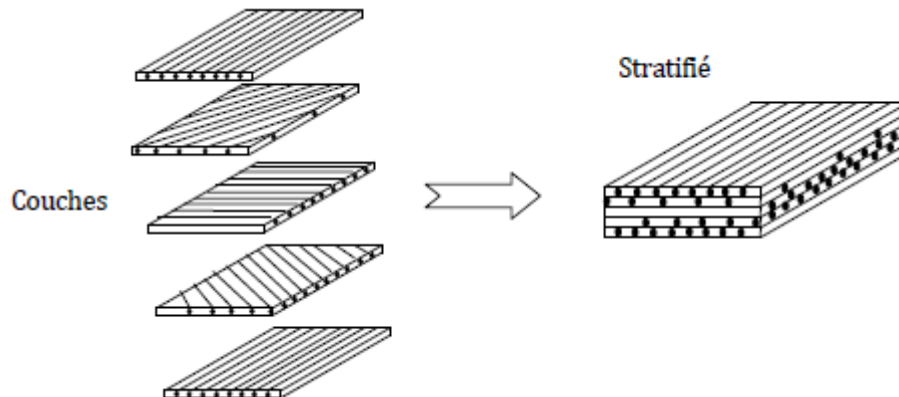
Figure II-1 Pli à renforcement unidirectionnel

### II.1.2.2 Stratifiés :

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches, et désigné comme le référentiel du stratifié.

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. On pourra des stratifiés du type :

1. Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction  $+\theta$  que de couches orientées suivant de direction  $-\theta$ .
2. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
3. antisymétrique : stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.
4. Croisé : stratifié comportant autant de couches à  $0^\circ$  que de couches à  $90^\circ$ .
5. Hybride : les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride.



*Figure II-2 : Constitution d'un stratifié*

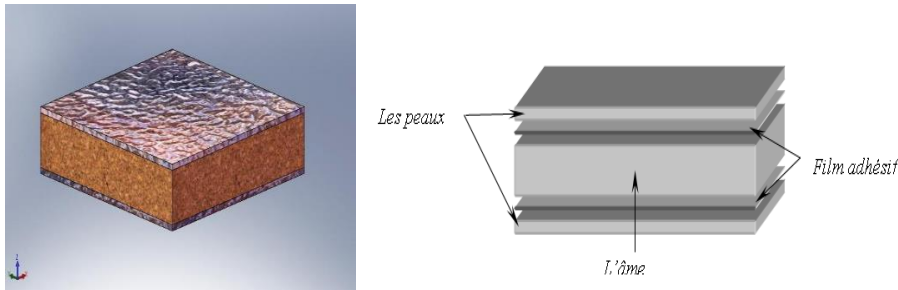
### II.1.3 Structure sandwich

#### II.1.3.1 Définition et constituants d'un sandwich :

Une structure sandwich est une structure tri-couches obtenue à partir de deux semelles, réalisées dans un matériau ayant de hautes caractéristiques mécaniques, collées sur une âme réalisée avec un matériau léger et une faible masse volumique. Une telle structure présente une solution de compromis permettant à la fois de rigidifier et d'alléger une structure. Elle est constituée généralement de trois composantes de base possédant des propriétés différentes,

mais complémentaires : les peaux, l'âme et l'adhésif. La figure présente les différents éléments constitutifs d'un matériau composite en construction sandwich :

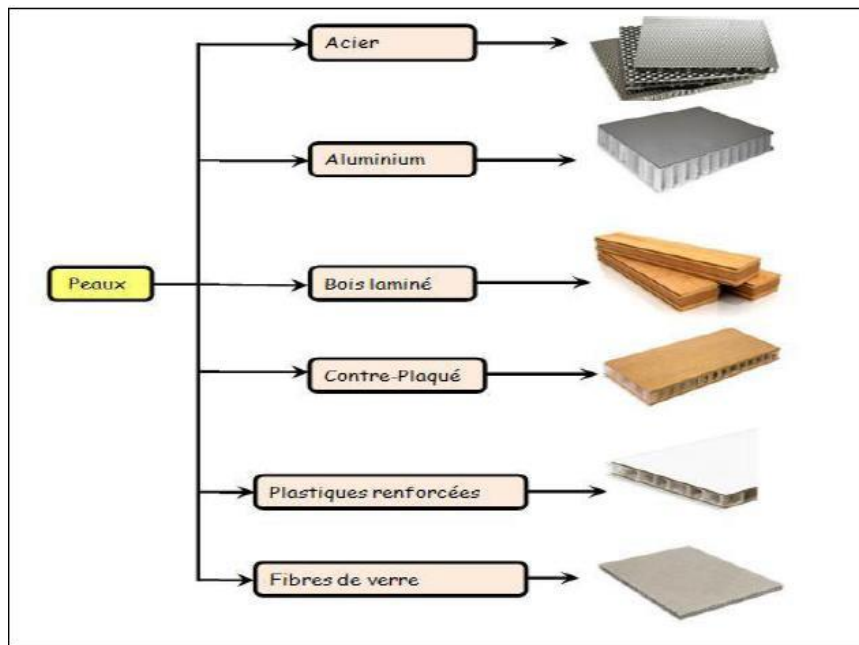
- ✓ Les peaux ;
- ✓ l'âme ;
- ✓ L'adhésif de surface.



**Figure II-3: Les différents constituants d'une structure sandwich** (ELRAOUG. A. 2008)

### II.1.3.2 Les peaux (ou semelles) :

Généralement planes et de faible épaisseur, qui reprennent les efforts mécaniques. Elles peuvent être de plusieurs natures : en métal, en stratifié, en bois (contreplaqué) ou encore en plaque thermoplastique. Le choix de la nature de la peau s'effectue principalement en fonction des performances mécaniques exigées. Mais en général, une rigidité élevée et une excellente résistance à la compression et à la traction sont les principales qualités recherchées (DRID A 2008).



*Figure II-4* Matériaux pour sandwich (MR Octobre, 2011)

#### ❖ Quelques matériaux pour la fabrication des peaux :

Les matériaux utilisés pour la fabrication des peaux peuvent être classés comme suit : une structure sandwich doit contenir deux faces (voir figure 2-2). Ces deux faces destinées à résister aux charges planes, elles peuvent être identiques ou différentes en épaisseur et en propriété mécanique. Cependant, dans des cas spéciaux les peaux doivent être différentes car l'une des deux peaux doit être celle qui porte les charges primaires exercées à une basse température tandis que l'autre face, elle doit résister à haute température et à la corrosion de l'environnement etc. Les propriétés escomptées pour les semelles sont une :

- haute rigidité ;
- valeur élevée du module de Young obtenue en compression et en traction ;
- résistance à l'impact ;
- résistance environnementale et d'usage.

#### II.1.3.3 L'âme :

C'est l'élément central d'une structure sandwich. Elle se caractérise par une faible masse et des faibles caractéristiques mécaniques. Son rôle principal est de supporter les efforts de compression et de cisaillement engendrés suite au mouvement de glissement des peaux sous chargement, et de maintenir leur

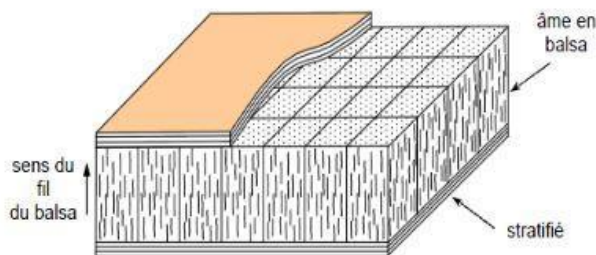
écartement. En effet, si l'épaisseur des panneaux n'est pas maintenue constante, il en résulte une diminution des capacités des peaux externes à résister à la flexion. L'épaisseur élevée de l'âme a pour but d'accroître le moment d'inertie du panneau sans augmenter la masse volumique. Les types d'âmes les plus communs dans le secteur industriel sont : le bois de balsa, les nids d'abeilles et les mousses en polymères rigides. Les structures sandwichs sont classées selon la nature de leurs âmes. Les âmes peuvent être classées en trois catégories principales, les mousses, les mousses renforcées et les parois minces.

❖ **Quelque matériaux pour la fabrication de l'âme :**

Les matériaux utilisés pour la fabrication de l'âme peuvent être classés comme suit (DAI 2003) :

a. Bois de Balsa (Balsa Wood) :

Le bois de balsa est utilisé pour sa très bonne résistance à la compression dans le sens des fibres du bois. Il a une structure cellulaire, le bois de balsa permet de fabriquer des sandwichs hautement résistants et très légers. La masse volumique de ce type d'âme varie entre 40 et 250 kg/m<sup>3</sup>. Le bois de balsa est aussi un isolant thermique mais pour conserver cette propriété, il doit être traité avec un produit hydrofuge puisqu'il est très hygroscopique. Le sens des fibres du balsa doit toujours être perpendiculaire à la direction des peaux.



**Figure II-5 :** Structure sandwich en bois de balsa et peaux en stratifié

b. Mousse de PVC lié Croisé :

La mousse de polyvinyle chlorites est manufacturée par combinaison polyvinyle copolymère avec stabilisateur, plastifieur, cross landing, des composés et agent de soufflage. Ils offrent une combinaison magnifique de renforcement et poids avec des rangs des densités entre 64 et 477 Kg/m<sup>3</sup>. c. Mousse thermoplastique :

C'est une matière très légère dont la densité est  $32\text{Kg/m}^3$ . Elle offre de basses propriétés mécaniques. Le polystyrène peut être attaqué et dissolu par le polyester. Elle a des applications à implantation et non structurel.

d. Mousse de polyuréthane :

Elle a une large gamme de densités 32 jusqu'à  $320.4\text{Kg/m}^3$ , mais elle n'offre pas de bonnes caractéristiques pour être utilisée dans les applications de structure.

e. Mousse syntactique :

Elle est fabriquée par mixage d'une cavité de micro sphère en résine.

f. Mousse de PVC linéaire :

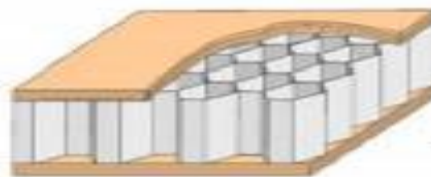
Elle est produite principalement pour l'industrie marine et elle permet le débatement significatif devant la fatigue. A la comparaison avec le PVC croix lies, le PVC linéaire donne des propriétés statiques favorables et la meilleure capacité à l'absorption de l'impact.



*Figure II-6: L'âme de Mousse*

g- Nid d'abeille :

L'âme en Nid d'abeilles, comme sous le nom « Nida », est un matériau souple constitué de mailles hexagonales, réalisée à partir de différents matériaux comme par exemple le papier ou l'aluminium.



*Figure II-7: âme en Nid d'abeilles.*

Le Nida a des propriétés mécaniques supérieures à celles des mousses. Sa masse

volumique peut varier entre 15 et 160 kg/m<sup>3</sup> ;

Lorsque les structures sandwichs constituées d'une âme Nida sont soumises à un chargement, les efforts en flexion sont absorbés par les deux peaux tandis que les efforts en cisaillement se répartissent entre les peaux et l'âme en Nida. L'ensemble offre à cette structure sandwich légèreté, rigidité, stabilité dimensionnelle et résistance à la corrosion (Nidas non métalliques).

La mousse de poly méthacrylate imide (PMI) est généralement utilisée pour des composites de construction avancée de fait de sa capacité à la résistance à des températures au-dessous de 176°C.

En regardant l'absorption de l'humidité, c'est un matériau pauvre pour les applications d'extérieure.

#### **II.1.3.4 Adhésif :**

Les conditions de l'adhésif sont fréquemment décrites comme étant la ligne de la liaison qui doit avoir au moins les mêmes efforts de tension et cisaillement que celles du matériau de l'âme. Les caractéristiques de la matière utilisée comme «adhésif» sont très importantes pour la performance de la structure sandwich puisque les semelles et l'âme doivent agir comme un ensemble ainsi que la prise en compte de la compatibilité avec les matériaux de faces et de l'âme.

#### **II.1.4 Analyse des travaux sur le comportement des matériaux sandwichs**

Lorsque les matériaux sandwichs sont sollicités en flexion, l'endommagement se manifeste par la décohésion entre la peau et l'âme, le délaminage des peaux et la fissuration par cisaillement de l'âme.

Le comportement mécanique élastique d'une structure en matériaux sandwichs est généralement analysé par la théorie des plaques sandwichs. Cette théorie est dérivée de la théorie des stratifiés prenant en compte le cisaillement transverse. Elle est basée sur une évaluation des champs des déplacements qui considère qu'une normale au plan moyen d'un stratifié reste un segment de droite lors de la déformation, cette déformée ne restant toutefois pas normale à la déformée du plan moyen. Cette théorie dans le cas de la flexion sera utilisée pour caractériser le comportement des sandwichs avec une fissure de longueur

variable. La formulation ainsi mise en place permettra d'évaluer les caractéristiques statiques en fonction de la longueur de la fissure à partir des résultats d'essais expérimentaux.

### II.1.5 Analyse à l'aide de la théorie des plaques sandwichs

Nous introduisons dans ce paragraphe, la théorie des plaques sandwichs afin d'analyser le comportement mécanique des matériaux sandwichs. Les hypothèses de la théorie des plaques sandwichs et sont les suivante (SOLA Avril 2011) :

- ✓ L'épaisseur des peaux est plus faible que celle de l'âme ;
- ✓ Les déplacements  $u$  et  $v$  sont des fonctions linéaires de la coordonnée  $z$  dans l'âme et uniformes dans l'épaisseur des peaux ;

L'âme ne transmet que les contraintes en cisaillement transverse  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  les autres contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{yy}$  sont négligés, le déplacement transverse  $w$  est indépendant de la variable  $z$  :

$w(x, y, z) = w(x, y, 0) = w_0(x, y)$ . La déformation  $\varepsilon_{zz}$  est négligée. Les contraintes en cisaillement  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  sont négligeables dans les peaux. La théorie des plaques utilise un schéma du champ des déplacements du premier ordre. Le champ de déplacement dans l'âme est de la forme.

$$u_a(x, y) = u_0(x, y) + z_0 \phi_x(x, y)$$

$$v_a(x, y) = u_0(x, y) + z_0 \phi_y(x, y)$$

Il en résulte qu'une normale au plan moyen reste droite au cours de la déformation. Pour assurer la continuité des déplacements aux interfaces âme-peau, les champs de déplacements dans les peaux supérieures et inférieures s'écrivent respectivement :

- Peaux supérieure

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \frac{h}{z} \phi_x(x, y)$$

$$v(x, y) = u_0(x, y) + \frac{h}{z} \phi_y(x, y)$$

- Peaux inférieure :

$$u(x, y) = u_0(x, y) - \frac{h}{z} \phi_x(x, y)$$

$$v(x, y) = u_0(x, y) - \frac{h}{z} \phi_y(x, y)$$

Les champs des déformations et des contraintes dans les peaux et dans l'âme sont déduits à partir du champ des déplacements donné précédemment. Ensuite l'équation constitutive des plaques sandwiches fait intervenir les résultantes et les moments :

- les résultantes en membrane :

La plaque sandwich est soumise dans son plan à des efforts résultants en membrane, notés N. Ces efforts sont entièrement supportés par les peaux et sont définis notés  $N_X$ ,  $N_Y$ ,  $N_{XY}$ .

### **II.1.6 Mode d'endommagement et ruine des structures sandwichs**

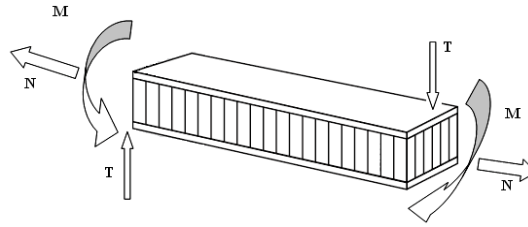
Les modes d'endommagement et ruine des structures sandwichs ont été étudiés par plusieurs chercheurs dans le domaine (DAI 2003) et (AVILA 2007).

(Petras A., 2002) ont montré que le processus des modes d'endommagement lors du chargement en flexion trois points, dépend de la charge, du rapport de la longueur entre appuis et de l'épaisseur des peaux et de la densité du cœur (ALLEN 1969). Triantafillou et Gibson, (1987) répertorient les différents modes de dégradation d'un sandwich soumis à la flexion.

Ils existent sept modes principaux de dégradation :

- ❖ déformation plastique de la peau ;
- ❖ flambement de la peau en compression ou "Wrinkling" ;
- ❖ flambement des cellules du cœur (l'âme) ;
- ❖ rupture en cisaillement du cœur ;
- ❖ indentation du cœur et de la peau au point d'application de la charge centrale.

Dans cette partie, nous décrivons les modes de ruptures des structures sandwichs soumises aux sollicitations données par la Figure II-2:

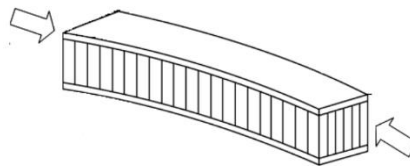


*Figure II-8: Différentes sollicitations appliquées sur un sandwich*

### II.1.6.1 Flambement généralisé des peaux

Une poutre sandwich soumise à de la compression, debout peut céder sous l'effet des conditions d'instabilité (Figure 2-3). Le flambement généralisé peut aussi survenir quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures aux résistances à la rupture. La charge, causant le flambement du sandwich, dépend des paramètres tels que les dimensions dans le plans de la poutre et les conditions aux limites, qui ne peuvent être modifiées que partiellement lors de la conception.

D'autres grandeurs, également importantes dans la définition de la charge de flambement, dépendent directement du type de sandwich, exemple la rigidité de flexion du sandwich, l'épaisseur des peaux, les propriétés élastiques des peaux, l'épaisseur de l'âme, ou le module de cisaillement de l'âme. Si l'on craint un flambement généralisé, on peut utiliser des peaux ayant un module d'élasticité plus élevé, augmenter l'épaisseur des peaux, et l'épaisseur de l'âme, ou encore utiliser pour l'âme un matériaux de module de cisaillement plus élevé

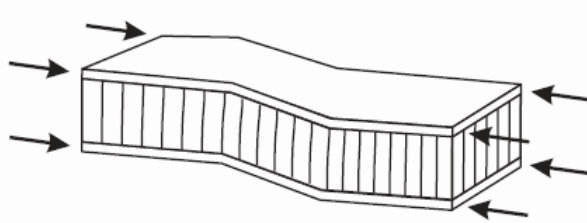


*Figure II-9 : Mode de ruine par « flambement généralisé » des peaux du sandwich.*

### II.1.6.2 Flambement généralisé des peaux « crimping »

Si le rapport longueur sur épaisseur est relativement faible, et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion, le flambement généralisé prend la forme du flambement de l'âme (figure 2-4). Le flambement de l'âme ne dépend pratiquement pas des propriétés des peaux, mais augmente

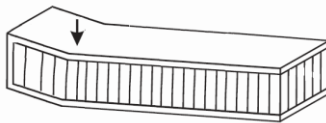
de façon linéaire avec l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement dans l'âme. Pour augmenter la résistance à cette charge critique, il faut donc soit augmenter l'épaisseur de l'âme, soit utiliser une âme de module de cisaillement plus élevé.



*Figure II-10 : Mode de ruine par flambement généralisé « general buckling » de l'âme du sandwich (OUADDAY 2003)*

### II.1.6.3 Rupture de l'âme en cisaillement

Si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au cisaillement du matériau de l'âme, il y a rupture de l'âme (figure 2-25). Dans ce cas, on peut soit utiliser un matériau pour l'âme possédant une résistance au cisaillement plus élevée, soit augmenter l'épaisseur de l'âme. Par contre, utiliser un matériau différent pour les peaux, ou changer leur épaisseur, n'aura aucun effet.



*Figure II-11: Mode de rupture par cisaillement de l'âme.*

### II.1.6.4 Observations des faciès de rupture après essais en flexion

(MR Octobre, 2011)

L'analyse des observations macroscopiques des éprouvettes rompues des sandwichs testés, a permis de mettre en évidence les mécanismes de rupture suivants :

- ❖ La rupture des deux sandwichs dépend fortement du type du stratifié formant les peaux (croisé ou unidirectionnel) ;
- ❖ l'endommagement se manifeste par une décohésion entre l'âme et la peau supérieure comprimée proche de l'appui central (événement 1) ensuite par

la propagation d'une fissure initiée par cisaillement en zig zag de l'âme (évènement 2) ce qui entraîne une autre décohésion entre l'âme et la peau inférieure (évènement 3) et donc la ruine finale du sandwich (figures 2-6).



*Figure II-12 : Observations macroscopique des faciès de rupture du sandwich*

### II.1.7 Définition d'une poutre composite :

Le terme de « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisée pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, les rails de chemin de fer, les ponts d'aérospatiale, la robotique et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions (figure). En ingénierie moderne, une poutre classique est remplacée par une poutre composite pour sa légèreté et sa résistance.



*Figure II-13 : Exemple d'une poutre composite en I (MR Octobre, 2011)*

### II.1.8 Comportement en flexion des poutres composites sans considération de l'effet du cisaillement transverse

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple. Cela est dû au caractère

hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, qui sont concentrées dans la direction des fibres. L'importance de développer une analyse du comportement mécanique en flexion des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme élément de base dans la réalisation des structures, et d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux stratifiés et à partir d'essais de flexion réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres. (THEILLOUT J. 2006)

#### II.1.8.1 Equations de comportement en flexion de poutres composites stratifiés

Une poutre est une membrane mince soumise à des charges transversales généralement normales à son axe. La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines.

En réaction aux charges appliquées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre. On appelle effort tranchant  $T$  la force interne transversale et moment fléchissant  $M$  le moment interne. Dans ce chapitre, nous étudierons ces forces et ces moments ; nous allons voir de quelle façon ils varient d'une zone les plus sollicitées afin de pouvoir déterminer le type de poutre à utiliser.

#### II.1.8.2 Types de poutres

##### A. Poutre simple

C'est une poutre reposant sur deux supports ; l'appui double. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.

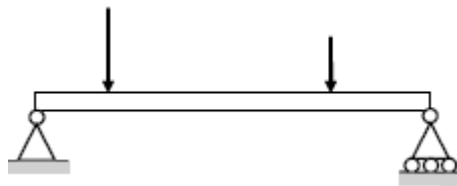


Figure II-14 : Cas d'une poutre simple

##### B. Poutre console

C'est une poutre encastree dans un mur à une l'extrémité. L'extrémité encastree ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité libre. Elle est

appelée poutre en porte-à-faux ou poutre encastrée à une extrémité.



Figure II-15 Cas d'une poutre en console

### C. Poutre avec porte-à-faux

C'est une poutre qui repose sur deux appuis (un simple et l'autre double) et a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux).

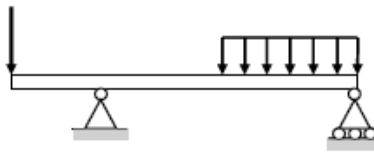


Figure II-16 Cas d'une poutre avec porte-à-faux

Les poutres sont classées suivant leurs appuis. Les trois types de poutres précédentes entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique), puisqu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même aux trois équations d'équilibre .

### D. Poutre encastrée et supportée

C'est une combinaison des types A et B. On note que la poutre est liée quatre fois (4 inconnues), c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

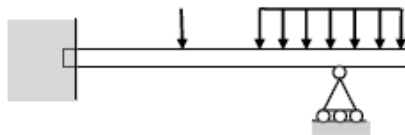


Figure II-17 : Cas d'une poutre Encastrée et supportée

### E. Poutre continue

C'est une poutre supportée par plus de deux supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

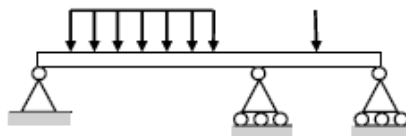
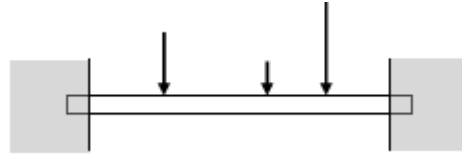


Figure II-18 Cas d'une poutre continue

## F. Poutre à double encastrement

C'est une poutre supportée par deux encastrement, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.



*Figure II-19 : Cas d'une poutre à double encastrement*

Les poutres D à F sont des poutres hyperstatiques. Elles ont plus fixation ou supports que nécessaires. Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre. Les équations de la statique ne suffisent pas pour analyser ces poutres. On a recourt à différentes méthodes.

### II.1.8.3 Types de charges

On peut distinguer les différentes charges suivantes :

- Charge concentrée ;
- Charge uniformément répartie
- Charge non uniformément répartie
- Couples.

Dans les charges concentrées, il y a aussi les charges axiales et les charges obliques ou inclinées par rapport à l'axe. Dans la pratique, on peut rencontrer l'un ou l'autre des types de charges ou une combinaison de plusieurs types de charges. Il est bon de pouvoir les reconnaître et les identifier.

### II.1.8.4 Lois de comportement

On a besoin de revoir les concepts et relations données par la résistance des matériaux appliquées aux poutres isotropes (en matériaux classiques), la théorie des poutres considère que la longueur  $L$  de la poutre est très supérieure à sa largeur  $b$ .

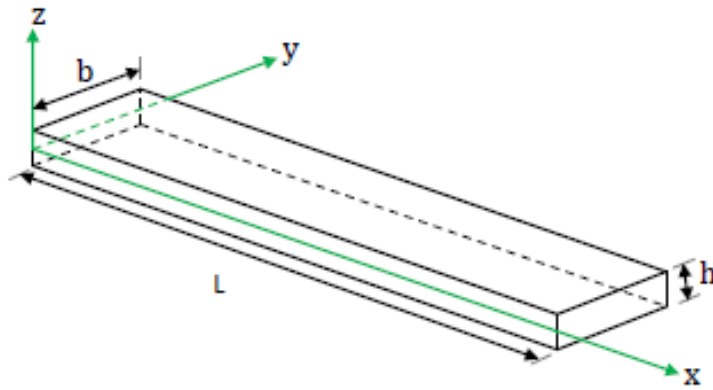


Figure II-20 : Elément poutre

## II.2 Approche microscopique (homogénéisation)

Le but de l'analyse microscopique est de récupérer, de la connaissance des propriétés des phases et de la géométrie du composite, les lois qui décrivent le comportement du composite au niveau macro mécanique comme matériau homogène : on cherche donc des **lois d'homogénéisation** (VACCUNI 2001).

Il existe plusieurs théories et modèles d'homogénéisation ; l'approche classique considère un volume élémentaire et significatif de composite et, pour un comportement isotrope linéaire des deux constituants, obtient les lois d'homogénéisation dans l'hypothèse d'adhérence parfaite entre fibres et matrice.

L'hétérogénéité peut influencer la rupture locale de différentes manières:

- ◆ pull-out (décollement des fibres et matrice) ;
- ◆ instabilité locale des fibres en compression ;
- ◆ influence sur la propagation des fissures ;
- ◆ différente résistance en traction et en compression.

La théorie générale de l'homogénéisation est très élaborée et fait appel à des concepts souvent compliqués.

Il convient dans la suite seulement de s'appesantir sur certaines théories classiques d'homogénéisation des propriétés mécaniques d'un composite, théories relativement simples, en nous bornant au cas de matériaux renforcés par des fibres disposées de façon uniforme et ordonnées dans une seule direction.

Dans le cas des composites renforcés par des fibres, le but des théories d'homogénéisation est celui, une fois connues les caractéristiques mécaniques des phases et la fraction volumique des fibres, de prédire les caractéristiques mécaniques homologues d'un solide homogène équivalent, qui reste toutefois, dans le cas en objet de fibre orientées, anisotrope.

Un concept commun à toutes les théories d'homogénéisation est celui de volume élémentaire représentatif. En linge générale, celui-ci est le volume minimum à prendre en considération pour que, une fois appliquée la théorie d'homogénéisation, le résultat obtenu soit représentatif du comportement macroscopique du milieu hétérogène.

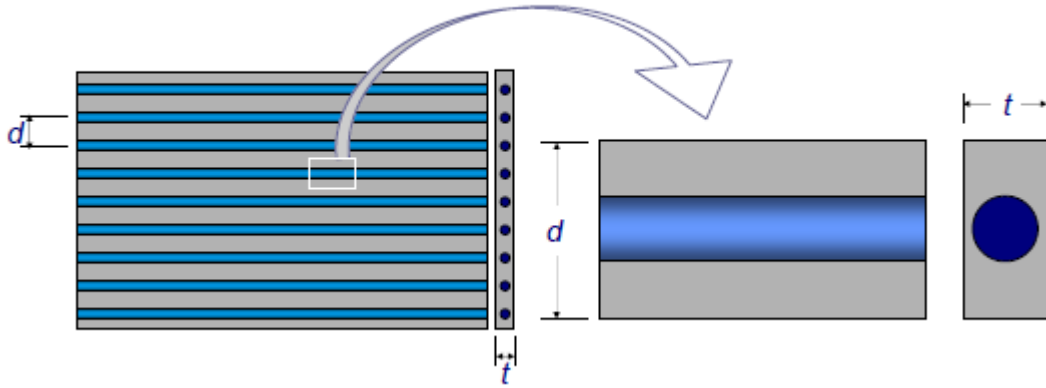
Au volume élémentaire représentatif on applique un modèle mécanique, caractéristique de la théorie d'homogénéisation choisie.

La définition du volume élémentaire représentatif peut ne pas être simple et dans certains cas elle fait l'objet d'une discussion.

Toutefois, dans les cas qui nous intéressent, la détermination du volume élémentaire représentatif est simple et immédiate, de par les symétries du problème. Un requis fondamental du volume élémentaire représentatif est que sa composition en volume doit respecter celle moyenne du milieu hétérogène.

Ceci implique que la fraction volumique de l'inclusion,  $V_f$ , à savoir le pourcentage en volume de l'inclusion sur le volume total, doit être identique à celle moyenne du milieu.

- Le cas qui nous intéresse ici est celui d'une couche renforcée par des fibres unidirectionnelles uniformément distribuées dans le corps de la couche.
- L'identification du volume élémentaire représentatif, dans ce cas, n'est pas difficile, et peut être faite comme en figure.



**Figure II-21** Volume élémentaire représentatif

Par le biais du volume élémentaire représentatif introduit auparavant, les caractéristiques mécaniques homogénéisées d'une couche à renfort unidirectionnel uniformément repartit peuvent être retrouvées.

- ❖ Les hypothèses de la théorie classique sont :
  - matrice isotrope, de module d'Young  $E_m$  et coefficient de Poisson  $\nu_m$  ;
  - fibres isotropes, de module d'Young  $E_f$  et coefficient de Poisson  $\nu_f$  ;
  - la fraction volumique des fibres est connue,  $V_f$  ;
  - le comportement est élastique linéaire ;
  - il y a adhésion parfaite entre fibres et matrice.

L'objectif est de déterminer les constantes techniques homogénéisées de la couche ; à cause de la disposition régulière des fibres, cette dernière a un comportement macroscopique orthotrope, l'axe  $x_1$  étant disposé conventionnellement selon la direction des fibres, l'axe  $x_2$  orthogonal à celles-ci, dans le plan de la couche, et l'axe  $x_3$  orthogonal à la couche.

Il faut donc calculer 4 constantes :  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  et  $\nu_{12}$

### III. Loi de Hooke pour un solide anisotrope

On se borne ici à l'analyse du comportement élastique linéaire, en petites déformations, d'un solide anisotrope de Green, pour lequel on définit un potentiel élastique  $V$ .

Le solide est chargé par des forces de volume  $\mathbf{q}$  et des forces de surface  $\mathbf{p}$  sur une partie de sa frontière.

On applique un champ de déplacements cinématiquement admissibles et infinitésimal  $\mathbf{du}$ , tel donc à pouvoir négliger la variation des forces appliquées.

Le travail des forces appliquées est alors (théorème de Clapeyron)

$$\begin{aligned}
 dw &= \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{u} dv + \int_{\partial\Omega} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{u} ds = dw = \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{u} dv + \int_{\partial\Omega} \sigma n \cdot d\mathbf{u} ds \\
 &= \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{u} dv + \int_{\partial\Omega} \sigma d\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{u} + \text{div}(\sigma n \cdot d\mathbf{u}) ds \quad (2.1) \\
 &= \int_{\Omega} (\mathbf{q} + \text{div}(\sigma)) \cdot d\mathbf{u} + \sigma \text{grad}(d\mathbf{u}) dv = \int_{\Omega} \sigma \cdot d\varepsilon dv
 \end{aligned}$$

La quantité  $dV = \sigma \cdot d\varepsilon = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$  représente la variation d'énergie potentielle interne par unité de volume en correspondance d'une variation infinitésimale de l'état de déformation.

Dans le cas d'un corps élastique, cette quantité  $dV$  doit être une différentielle exacte ; en fait, la variation totale, par unité de volume, de l'énergie potentielle interne lors d'une transformation d'un état A à un état B, doit être, dans un tel cas, indépendant du parcours d'intégration :

$$V = \int_A^B dV = V_B - V_A \Leftrightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}$$

On obtient donc la formule de Green :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Si on admet qu'à l'état initial  $\varepsilon=0$ ,  $\sigma=0$  et si on pose  $V=0$ , en approximant  $V$  au premier terme non nul, on a :

$$V(\varepsilon) = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \varepsilon E \varepsilon \quad (2.2)$$

Avec les coefficients  $E_{ijkl}$  qui sont les composantes d'un tenseur du 4ème ordre,  $E$ . Si l'on applique alors la formule de Green à la fonction  $V(\varepsilon)$  et si l'on tient compte de la relation ci-dessus, qui établit l'existence des symétries majeures des indices, on a :

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \rightarrow \sigma = E \varepsilon \quad (2.3)$$

qui est la loi de Hooke généralisée ; elle établit la linéarité entre les composantes de la contrainte et celles de la déformation ; les composantes  $E_{ijkl}$  sont les modules d'élasticité (Lekhnitskii), et  $E$  est le tenseur élastique, ou tenseur de rigidité élastique.

Cependant, on ne connaît pas des solides totalement anisotropes: les milieux naturels, telles les cristaux ou le bois, et ceux artificiels, tels les composites, montrent toujours une quelque forme de symétrie du comportement, à savoir une réponse identique dans certaines directions liées par des relations de symétrie.

Ces symétries du comportement sont le plus souvent le résultat d'une symétrie matérielle, due par exemple à l'existence d'une géométrie organisée de la disposition des constituants moléculaires, c'est le cas des cristaux, ou de la disposition ordonnée de fibres de renfort, comme pour le bois ou les composites, tandis que dans le cas des matériaux avec structure, comme les stratifiés, ce type de symétrie de la constitution matérielle peut manquer, même en présence d'une symétrie de la réponse mécanique.

La loi de Hooke peut être représentée de façons différentes. La méthode la plus correcte est celle tensorielle, où les différentes grandeurs tensorielles sont représentées de la manière classique, aussi bien en notation symbolique que par indices, en utilisant la convention d'Einstein pour la sommation (ce qu'on a fait jusqu'ici):

$$\sigma = E \varepsilon \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$V = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \varepsilon E \varepsilon = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon \quad (2.4)$$

Dans cette représentation, on exploite les symétries tensorielles, des indices,

pour réduire le nombre des composantes qui sont considérées et on transforme les tenseurs  $\varepsilon$  et  $\sigma$  en vecteurs colonne et le tenseur élastique  $E$  en une matrice symétrique 6x6 : l'approche devient purement matricielle.

❖ En particulier, la notation de Voigt est la suivante

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33}, \\
 \sigma_4 &= \sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sigma_{31}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12} \\
 \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \\
 \varepsilon_4 &= \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_5 = \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_6 = \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

A remarquer l'emploi des composantes  $\gamma_{ij}$  en lieu de celles tensorielles, circonstance qui provoquera des problèmes dans la suite.

La loi de Hooke est donc écrite ainsi :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}
 \tag{2.6}$$

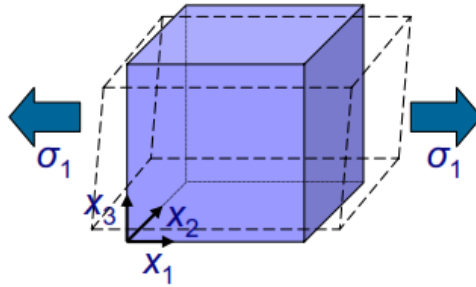
### III.1.1 Signification physique des composantes élastiques

La loi de comportement anisotrope peut être ultérieurement simplifiée si, outre les symétries tensorielles, qui réduisent à 21 le nombre des modules élastiques indépendants, on considère aussi les éventuelles symétries matérielles, qui naturellement dépendent des matériaux et ne sont donc pas communes à tous les milieux continus.

Cependant, avant de traiter cet aspect et vu qu'on dispose du lien élastique anisotrope général, il est opportun de considérer dès maintenant la signification physique que les différents modules élastiques ont.

En fait, on constate dans les matériaux anisotropes des effets inconnus dans les matériaux classiques, à savoir les milieux élastiques et isotropes, et ces effets sont justement représentés et quantifiés par les modules élastiques ou, mieux encore, par les coefficients de déformation, c'est à dire par les composantes du tenseur  $\mathbf{Z}$  ou de la matrice  $[S]$ .

Pour comprendre ça, considérons un cube d'un milieu élastique anisotrope, soumis à la seule contrainte  $\sigma_1$ , figure suivante



$$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1, \quad \varepsilon_2 = S_{21}\sigma_1, \quad \varepsilon_3 = S_{31}\sigma_1,$$

$$\varepsilon_4 = S_{41}\sigma_1, \quad \varepsilon_5 = S_{51}\sigma_1, \quad \varepsilon_6 = S_{12}\sigma_1$$

Ou en forme tensorielle,

$$\varepsilon_{11} = Z_{1111}\sigma_{11}, \quad \varepsilon_{22} = Z_{2211}\sigma_{11}, \quad \varepsilon_{33} = Z_{3311}\sigma_{11},$$

(2. 7)

$$\varepsilon_{23} = Z_{2311}\sigma_{11}, \quad \varepsilon_{31} = Z_{3111}\sigma_{11}, \quad \varepsilon_{12} = Z_{1211}\sigma_{11}$$

On observe donc que le milieu subit non seulement des déformations normales, mais aussi de cisaillement, même s'il est soumis seulement à un état mono-axial de contrainte normale.

Il y a donc des couplages (dus aux composantes du type  $S_{ij}$ ,  $i=4,5,6$ ,  $j=1,2,3$ ) inexistant dans un milieu isotrope, pour lequel les seuls couplages possibles (dus aux termes du type  $S_{ij}$ ,  $i,j=1,2,3$ ,  $i \neq j$ ) sont ceux entre contraintes et déformations normales, à savoir l'effet Poisson.

En outre, l'effet Poisson n'est pas, en général, le même dans les deux directions transversales (à savoir, par exemple, que  $S_{21} \neq S_{31}$ ). Le cube change donc non seulement de volume, mais aussi de forme et devient un prisme irrégulier (il ne se transforme pas en un parallélépipède). De la même manière, si le cube est soumis à un état de cisaillement pur, par exemple dans le plan 1-2 et parallèle à

x1, on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{15}\sigma_5, \quad \varepsilon_2 = S_{25}\sigma_5, \quad \varepsilon_3 = S_{35}\sigma_5, \\ \varepsilon_4 &= S_{45}\sigma_5, \quad \varepsilon_5 = S_{55}\sigma_5, \quad \varepsilon_6 = S_{65}\sigma_5. \end{aligned} \tag{2. 8}$$

Dans la matrice  $[S]$  on peut donc repérer les groupes de composantes responsables des différents effets, directs (les termes sur la diagonale) ou de couplage, comme dans le schéma suivant (il est ensuite immédiat de transférer ces considérations aux composantes correspondantes du tenseur  $\mathbf{Z}$ ).

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \tag{2. 9}$$

### III.1.2 Les différentes symétries élastiques

Considérons à présent les différentes symétries élastiques possibles ; elles sont :

- ❖ symétrie par rapport à un plan ;
  - ❖ symétrie par rapport à trois plans orthogonaux ;
  - ❖ symétrie d'ordre  $n$  par rapport à un axe ;
  - ❖ symétrie complète.
- **Symétrie par rapport à un plan** : ceci signifie qu'à travers chaque point du matériau, passe un plan ayant la propriété que deux directions symétriques par rapport au plan sont directions équivalentes.

Dans ce cas le tenseur  $\mathbf{U}$  représente une réflexion ; si le plan  $(X_1, X_2)$  de symétrie matérielle est orthogonal à l'axe  $X_3$ , alors

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

En fait, de cette façon on obtient une symétrie miroir du référentiel, dans laquelle seulement l'axe  $X_3$  change d'orientation.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_i = \sigma'_i, \varepsilon_i = \varepsilon'_i, \quad i=1,2,3,6;$$

$$\sigma_i = -\sigma'_i, \varepsilon_i = -\varepsilon'_i, \quad i=4,5$$

alors la condition

$$V=V' \rightarrow \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} = \{[T^{-T}] \{\varepsilon\}\}^T [C] [T^{-T}] \{\varepsilon\},$$

Devient

$$\begin{aligned} & C_{14}\varepsilon_1\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_1\varepsilon_5 + C_{24}\varepsilon_2\varepsilon_4 + C_{25}\varepsilon_2\varepsilon_5 + \\ & + C_{34}\varepsilon_3\varepsilon_4 + C_{35}\varepsilon_3\varepsilon_5 + C_{46}\varepsilon_4\varepsilon_6 + C_{56}\varepsilon_5\varepsilon_6 = 0, \quad \forall \varepsilon. \end{aligned} \tag{2. 10}$$

La seule possibilité pour que cette équation soit vérifiée pour chaque possible état de déformation est que ce soit :

$$C_{14} = C_{15} = C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{46} = C_{56} = 0$$

La matrice d'élasticité se réduit donc à seules 13 composantes distinctes

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2. 11)$$

**Symétrie par rapport à trois plans orthogonaux** : considérons maintenant le cas où le matériau possède un autre plan de symétrie, orthogonal au précédent. Soit par exemple  $x_2=0$  ce nouveau plan de symétrie ; par la même démarche on obtient

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_i = \sigma'_i, \varepsilon_i = \varepsilon'_i, \quad i=1,2,3,5;$$

$$\sigma_i = -\sigma'_i, \varepsilon_i = -\varepsilon'_i, \quad i=4,6$$

$$c_{14}\varepsilon_1\varepsilon_4 + c_{16}\varepsilon_1\varepsilon_6 + c_{24}\varepsilon_2\varepsilon_4 + c_{26}\varepsilon_2\varepsilon_6 + c_{34}\varepsilon_3\varepsilon_4 + c_{36}\varepsilon_3\varepsilon_6 + c_{54}\varepsilon_5\varepsilon_4 + c_{56}\varepsilon_5\varepsilon_6 = 0, \quad \forall \varepsilon. \quad (2. 12)$$

De celle-ci, on obtient les conditions supplémentaires sur les composantes de  $[C]$ :

$$c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{54} = 0$$

Le nombre des composantes élastiques indépendantes est donc réduit à 9.

Considérons à présent l'existence d'un troisième plan de symétrie, orthogonal aux deux autres (évidemment, le plan  $x_1=0$ , le seul qui reste).

Par la même démarche on a/

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_i = \sigma'_i, \varepsilon_i = \varepsilon'_i, i=1,2,3,4;$$

$$\sigma_i = -\sigma'_i, \varepsilon_i = -\varepsilon'_i, i=5,6$$

$$C_{15}\varepsilon_1\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_1\varepsilon_6 + C_{25}\varepsilon_2\varepsilon_5 + C_{26}\varepsilon_2\varepsilon_6 + C_{35}\varepsilon_3\varepsilon_5 + C_{36}\varepsilon_3\varepsilon_6 + C_{45}\varepsilon_5\varepsilon_4 + C_{46}\varepsilon_4\varepsilon_6 = 0, \forall \varepsilon. \quad (2.13)$$

On remarque facilement que cette relation n'offre aucune condition supplémentaire sur les composantes de  $[C]$ : l'existence d'un troisième plan de symétrie, orthogonal au deux autres, n'ajoute rien de plus.

Vu que la procédure suivie ne dépend pas de l'ordre dans lequel on considère les différentes symétries, comme on constate facilement, cette circonstance peut être interprétée comme le fait que l'existence de deux seuls plans de symétrie orthogonale est impossible : un deuxième plan de symétrie orthogonale implique nécessairement l'existence aussi d'un troisième plan de symétrie.

Dans ces cas, donc, le nombre des constantes élastiques indépendantes se réduit à 9 ; ces matériaux s'appellent orthogonalement anisotropes, ou plus simplement orthotropes.

Plusieurs matériaux, naturels ou composites artificiels, sont orthotropes ; cette classe de matériaux a donc une grande importance dans les applications.

Le comportement orthotrope est donc décrit par une loi du type :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

On remarque que pour les matériaux orthotropes, par rapport au repère de symétrie matérielle, dit aussi repère d'orthotropie, tous les couplages typiques de l'anisotropie sont nuls ; restent seulement les couplages entre contraintes et déformations normales, à savoir les effets de Poisson, généralement différents, dans les trois directions de symétrie.

Pour la matrice  $[S]$  on obtient un résultat analogue ;

Si l'on exprime l'invariance du potentiel élastique dans les 2 repères, on obtient une équation plutôt longue, qu'on omet par brévit . Les conditions sur les composantes de la matrice  $[C]$ , qu'on obtient en imposant que l'invariance citée soit valable pour chaque état de déformation, sont au total de 14:

$$c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{34} = c_{35} = c_{45} = 0, \quad c_{22} = c_{11}, \quad c_{55} = c_{44}, \quad c_{23} = c_{13} \quad (2.15)$$

$$c_{24} = -c_{14} \quad c_{15} = -c_{25}, \quad c_{46} = c_{25}, \quad c_{56} = c_{14}, \quad c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}$$

La loi de comportement élastique dans ce cas dépend donc de 7 composantes élastiques indépendantes.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & -c_{25} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & c_{25} & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & c_{25} \\ -c_{25} & c_{25} & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & c_{25} & c_{14} & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Dans ce cas pour la matrice  $[S]$  on obtient un résultat légèrement différent :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & -S_{25} & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & -S_{14} & S_{25} & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ S_{14} & -S_{14} & 0 & S_{44} & 0 & S_{25} \\ -S_{25} & S_{25} & 0 & 0 & S_{44} & S_{14} \\ 0 & 0 & 0 & S_{25} & S_{14} & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

### III.1.3 Les constantes techniques d'élasticité

Une description alternative, très utilisée, du comportement élastique est celle qui fait usage des *constantes élastiques* ou de *l'ingénieur*. L'avantage de ces grandeurs est qu'elles quantifient un effet, direct ou de couplage, ayant une signification physique évidente, facilement identifiable et reproductible dans des tests de laboratoire. La conséquence de tout ça est que ces constantes sont directement trouvées à partir de (plus ou moins) simples essais de laboratoire, comme par exemple celui de traction.

Ces constantes techniques, au nombre de 21, évidemment, pour le cas le plus général d'anisotropie totale, sont :

- ❖ 3 modules d'Young  $E_i$ ,  $i=1, 2, 3$  ;
- ❖ 3 modules de cisaillement  $G_{ij}$ ,  $i,j=1, 2, 3$  ;
- ❖ 3 modules de poisson  $\nu_{ij}$ ,  $i,j=1, 2, 3$  ;
- ❖ 3 modules de chentsov  $\mu_{ij,kl}$ ,  $i,j,k,l=1, 2, 3$  ;
- ❖ 9 coefficients d'influence mutuelle de 1<sup>er</sup> ou 2<sup>ème</sup> type,  $\eta_{ij,k}$  ou  $\eta_{i,jk}$ ,  $i,j,k,l=1, 2, 3$  ;

**Modules d'Young** : de façon identique au cas isotrope, on définit le module d'Young  $E_i$  comme :

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \quad i=1,2,3 \quad \sigma_j = 0 \quad \text{pour } j \neq i, \quad j = 1, \dots, 6.$$

il en résulte les relations

$$S_1 = Z_{1111} = \frac{1}{E_1}, \quad S_2 = Z_{2222} = \frac{1}{E_2}, \quad S_3 = Z_{3333} = \frac{1}{E_3}$$

**Modules à cisaillement** : toujours comme dans le cas isotrope, on définit le module à cisaillement  $G_{ij}$  comme

$$G_{ij} = \frac{\sigma_k}{\varepsilon_k}, \quad i,j=1,2,3 \quad k=4,5,6, \quad \sigma_h = 0 \quad \text{pour } h \neq k, \quad h = 1, \dots, 6.$$

En utilisant la relation selon laquelle  $G_{ij}=G_{ji}$ , les modules à cisaillement sont donc seulement 3. Il en résulte les relations suivantes

$$S_{44} = 4Z_{2323} = \frac{1}{G_{23}}, \quad S_{55} = 4Z_{1313} = \frac{1}{G_{13}}, \quad S_{66} = 4Z_{12212} = \frac{1}{G_{12}}$$

**Coefficients de Poisson** : la définition des coefficients de Poisson est celle classique :

$$\nu_{ij} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \quad i,j=1,2,3 \quad \sigma_k = 0 \quad \text{pour } k \neq i, \quad k = 1, \dots, 6.$$

**Coefficients de Chentsov**: ils sont défini ainsi:

$$\mu_{ij,kl} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{kl}}, \quad i,j,k,l=1,2,3 \quad j \neq i, \quad k \neq l$$

$$\sigma_{pq} = 0 \quad \text{pour } pq \neq kl, \quad p,q=1,2,3.$$

de même, de la définition donnée pour les modules de cisaillement on a:

$$\varepsilon_{ij} = \mu_{ij,kl} \varepsilon_{kl} = \mu_{ij,kl} \frac{\sigma_{kl}}{G_{kl}}, \quad i,j,k,l=1,2,3 \quad j \neq i, \quad k \neq l$$

$$\sigma_{pq} = 0 \quad \text{pour } pq \neq kl, \quad p,q=1,2,3.$$

**Coefficients d'influence mutuelle du 1<sup>er</sup> type** : ils sont définis ainsi :

$$\eta_{i,jk} = \frac{\sigma_i}{2\varepsilon_{jk}}, \quad i,j,k=1,2,3 \quad j \neq k \quad \sigma_{pq} = 0 \quad \text{pour } pq \neq jk, \quad p,q = 1,2,3. \text{ Ces coefficients}$$

caractérisent donc la déformation normale en direction  $i$  due à un cisaillement en direction  $x_j$  sur le plan orthogonal à  $x_k$

Les définitions données pour les modules de cisaillement, donnent ensuite

$$\varepsilon_{ij} = 2\eta_{i,jk} \varepsilon_{jk} = \eta_{i,jk} \frac{\sigma_{jk}}{G_{jk}}, \quad i,j,k=1,2,3 \quad j \neq k$$

$$\sigma_{pq} = 0 \quad \text{pour } pq \neq jk, \quad p,q = 1,2,3.$$

**Coefficients d'influence mutuelle du 2<sup>ème</sup> type** : ils sont définis ainsi :

$$\eta_{i,jk} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{2\varepsilon_{kk}}, \quad i,j,k=1,2,3 \quad j \neq i$$

$$\sigma_{pq} = 0 \quad \text{pour } pq \neq kk, \quad p,q = 1,2,3.$$

Ces coefficients caractérisent donc la déformation à cisaillement relative aux directions  $x_i$  et  $x_j$  due à un effort normal en direction  $k$ .

Les définitions données des modules d'Young offrent ensuite

$$2\varepsilon_{ij} = 2\eta_{i,jk}\varepsilon_{kk} = \eta_{ij,k} \frac{\sigma_{kk}}{E_k}, \quad i,j,k=1,2,3 \quad j \neq i$$

$$\sigma_{pq} = 0 \quad \text{pour } pq \neq kk, \quad p,q = 1,2,3.$$

Les équations de Lamé en fonction de ces constantes techniques s'écrivent

$$\sigma = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr} \varepsilon I \right), \tag{2.18}$$

$$\varepsilon = \frac{E}{1+\nu} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr} \sigma I$$

Les constantes techniques  $E$  et  $\nu$  sont liées aux constantes de Lamé et aux composantes de  $[C]$  par les relations suivantes :

$$E = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\lambda + \mu} = (c_{11} - c_{12}) \frac{c_{11} + 2c_{12}}{c_{11} + c_{12}}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{c_{12}}{c_{11} + c_{12}}, \tag{2.19}$$

$$\lambda = c_{12} = \frac{\lambda E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad c_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

#### IV. La loi fondamentale des stratifiés

La loi fondamentale des stratifiés relie le champ de déformations au champ de contraintes. En d'autre terme, la connaissance du champ de déformations permet de remonter, par le biais du calcul des contraintes, aux résultantes des actions internes, et de lier donc ces dernières aux déformations. Ceci est le but principal de la théorie classique des stratifiés.

Nous avons vu que, dans le modèle mécanique utilisé, le champ de déformations est plan. Nous nous proposons à présent, en premier lieu, de passer au champ des contraintes.

Ces passage est seulement apparemment immédiat, alors qu'en réalité il nécessite d'une certaines attention. Notons que la poutre sandwich de notre étude

est constituée de deux semelles ou encore appelées « peaux » en matériaux anisotropes et d'une âme en polystyrène. Ces semelles sont des plaques stratifiées constituées de plusieurs plis ou couches. En effet, pour analyser le comportement mécanique de ces plaques par la loi fondamentale des stratifiés, il convient tout d'abord de fixer la situation de calcul :

Il faut trouver les contraintes dans une couche comme en figure, en considérant que déformations et contraintes doivent être connues, en général, dans un repère quelconque (x, y, z), où nous les indiquerons par le symbole  $\epsilon'_i$  et  $\sigma'_i$ ,  $i=1,\dots,6$ . Les contraintes dans un repère quelconque, seront du type :

$$\sigma'_i = c'_{1i}\epsilon'_1 + c'_{2i}\epsilon'_2 + c'_{6i}\epsilon'_6, \quad i=1,\dots,6$$

Donc, l'état de contrainte n'est pas, en général, plan. Mais si l'on considère la situation réelle, des matériaux avec renfort directionnel où, voir la figure, le comportement est isotrope transverse, avec direction  $x_1$  de l'axe orthogonal au plan d'isotropie, pour lesquels

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{22}-c_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Alors on reconnaît, en suivant les procédures vues pour une rotation  $\theta$  autour de l'axe  $X_3$  de la matrice  $[C]$ , que

$$c'_{14} = c'_{24} = c'_{64} = c'_{15} = c'_{25} = c'_{65} = 0,$$

$$c'_{13} = c_{12}c^2 + c_{23}s^2, \quad c'_{23} = c_{12}s^2 + c_{23}c^2, \quad c'_{63} = -sc(c_{12} + c_{23}),$$

$$s = \sin \theta, \quad c = \cos \theta.$$

La première ligne ci-dessus est vraie même pour le cas plus général de couches orthotrope avec  $X_3$  axe d'orthotropie.

Il en suit  $\sigma_3' \neq 0, \sigma_4' = \sigma_5' = 0$

Dans d'autres mots, tandis que l'état de déformation est plan, celui de la contrainte ne l'est pas ; en général, en fait,

$$\sigma_3' = (c_{12}c^2 + c_{23}s^2)\varepsilon_1' + (c_{12}c^2 + c_{23}s^2)\varepsilon_2' - sc(c_{12} + c_{23})\varepsilon_6',$$

$$s = \sin \theta, \quad c = \cos \theta.$$

A stricte rigueur, donc, il n'est pas possible d'utiliser les résultats vus auparavant qui concernent la loi de comportement pour un état plan de contrainte.

- ◆ Toutefois, on admet encore que ceci soit possible, dans d'autres mots on considère que ce soit  $\sigma_3' = 0$
- ◆ Certains auteurs, par exemple Lekhnitskii, Jones, Pedersen, admettent simplement ce fait comme une hypothèse de base de la théorie classique des stratifiés.
- ◆ Une justification de cette hypothèse, peut toutefois être trouvée dans ce que normalement on admet même en théorie classique des plaques : sur les surfaces extérieures de la plaque, la valeur de la contrainte  $\sigma_3'$  est égal à celui des pressions de contact, qui généralement sont inférieures, pour les charges réparties ordinaires, de un ou deux ordres de grandeur par rapport aux contraintes admissibles, auxquelles sont proches les composantes dans le plan du tenseur de la contrainte.

Ensuite, du moment que l'épaisseur est petite, si les contraintes varient avec continuité, il est vraisemblable que la valeur absolue de  $\sigma_3'$  reste bornée et donc négligeable par rapport à celui des contraintes dans le plan.

- ◆ Cet argument est classique en mécanique des plaques ; évidemment, cette approximation ne peut être considérée valable là où on a des états de contrainte triaxiale significatifs, comme c'est le cas des zones d'appui ou d'encastrement et celles d'application des charges concentrées.
- ◆ Un commentaire ultérieure concerne la plausibilité mécanique des hypothèses faites : en effet, celles-ci amènent, pour les stratifiés, à deux conséquences importantes.

- ◆ La première concerne les contraintes à cisaillement en direction  $x_3$ ,  $\sigma_3'$  et  $\sigma_5'$  : comme celles-ci sont nulles, il est en principe impossible l'équilibre d'un élément de plaque sous l'action de charges orthogonales au plan moyen. Cette circonstance est bien connue même en théorie classique des plaques et dans ce cas on trouve un remède en faisant appel aux équations d'équilibre.
- ◆ La seconde, s'observe directement dans la dernière équation : la contrainte  $\sigma_3'$  est discontinue à l'interface des couches. Celui-ci est un paradoxe qui dérive du modèle cinématique adopté et qui rend en principe plus délicate l'admissibilité de l'hypothèse que  $\sigma_3'$  soit négligeable.
- ◆ Ces deux paradoxes sont résolus, pour les stratifiés, en faisant appel à des théories d'ordre supérieur.
- ◆ Ces indications servent, avec d'autres, à mieux comprendre le champ d'application de la théorie classique des stratifiés, qui, on l'a déjà dit, doit être vue surtout comme un moyen pour prédire le comportement élastique global du stratifié, plutôt que comme une théorie capable de calculer avec la finesse requise les vrais champs de contrainte et de déformation dans le stratifié.
- ◆ En admettant donc que l'état de contrainte soit plan, on peut utiliser comme loi de comportement celle déjà introduite,

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2. 21)$$

On parvient donc à la loi fondamentale des stratifiés, qui écrite en forme matricielle symbolique est

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ k \end{Bmatrix} \quad (2. 22)$$

En général, l'inversion donne :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad \text{avec}$$

N : efforts membranaires

$M$  : efforts de flexion et de torsion

$\varepsilon^o$  : Tenseur de petites déformations dans le plan moyen.

$k$  : L'opposé du tenseur des courbures du plan moyen

$$\varepsilon(z) = [T^{-T}(\delta_k)] \varepsilon'(z) = [T^{-T}(\delta_k)](\varepsilon^o + zk)$$

$$\{\sigma_{(z)}\} = [Q]\{\varepsilon_{(z)}\}$$

#### IV.1 Les équations d'équilibre d'un stratifié

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2. 23)$$

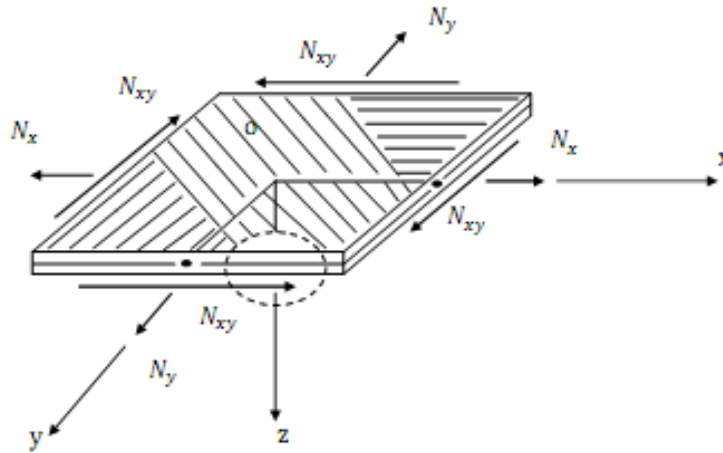
#### IV.2 Loi de comportement d'un matériau composite stratifié :

Le comportement élastique d'un pli constitue la base avec laquelle le comportement du stratifié est décrit, en tenant compte des caractéristiques indépendantes de chaque pli.

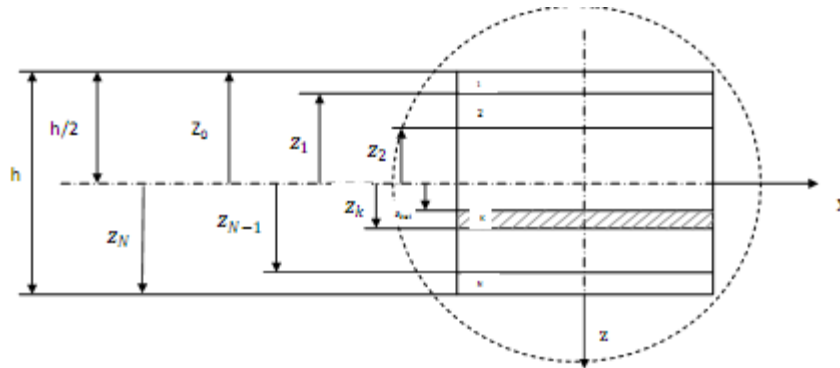
Dans ce paragraphe on va étudier le comportement lorsqu'il est soumis à un ensemble de sollicitations, cette étude est indispensable si l'on désire que la déformation du stratifié ne soit pas trop importante, ou bien que les contraintes conservent des valeurs admissibles.

##### IV.2.1 Comportement en membrane :

Nous considérons dans ce qui suit un stratifié plan pourvu de la symétrie miroir. L'épaisseur totale du stratifié est notée  $h$  (SALIHA 2010). Il est constitué en  $n$  plis. Le pli numéro  $k$  a une épaisseur notée  $e_k$ . Le plan (x-y) est le plan de symétrie (ou plan moyen).



**Figure IV-1 : Efforts de membrane appliquées sur un stratifié**



**Figure IV-2 : Géométrie des N-couches du stratifié**

Le composite stratifié est soumis à des sollicitations dans son plan, qui sont notés  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  ou  $(N_{yx})$  par unité d'envergure suivant la direction x ou la direction y. Il s'agit là d'effort dits de membrane, ou éléments de réduction pour les contraintes, ou encore flux d'efforts dans le stratifié.

Les efforts de membranes sont obtenus par intégration des contraintes par unité d'envergure de chaque couche à travers l'épaisseur du stratifié.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2. 24)$$

$N_x$  : Effort résultant dans la direction x par unité de longueur suivant y.

$N_y$  : Effort résultant dans la direction y par unité de longueur suivant x

$N_{xy}$  : Cisaillement de membrane par unité de largeur suivant la direction y.

Dans le cas du stratifié, on a une répartition continue des contraintes dans une couche, mais discontinue d'une à une autre. Les efforts en membrane seront exprimés sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (2.25)$$

Où  $Z_{k-1}$  et  $Z_k$  sont respectivement les coordonnées de la couche d'ordre  $k$  et  $k-1$  dans la direction perpendiculaire au stratifié définies par la figure (3.2)

Par substitution on a :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} kx \\ ky \\ kxy \end{Bmatrix} dz \quad (2.26)$$

Puisque la matrice  $[\bar{Q}]_k$  n'étant pas en fonction de distance  $z$ ,  $[\varepsilon^0]$  et  $[k]$  sont indépendantes de  $z$  et de l'ordre de la disposition des couches dans le stratifié, la dernière relation peut alors s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_X \\ K_Y \\ K_{XY} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

dont les coefficients  $A_{ij}$  sont appelés les rigidités de membrane.

$$A = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \bar{Q}_k$$

$$A = [A_{ij}] ; A_{ij} = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) (\bar{Q}_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k e_k$$

Les coefficients  $B_{ij}$  sont appelés les rigidités de couplage :

$$B = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \bar{Q}_k$$

$$B = [B_{ij}] ; B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) (\bar{Q}_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k e_k z_k$$

L'intégration des deux premières équations d'équilibre suivant l'épaisseur du stratifié conduit aux relations fondamentales de mouvement relatives aux résultantes en membrane :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (2. 28)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

D'où :

$$F_x = \int_{-h/2}^{h/2} p_x dz \quad \text{et} \quad F_y = \int_{-h/2}^{h/2} p_y dz \quad (2. 29)$$

Les contraintes de cisaillement exercées sur les faces supérieures et inférieures du stratifié sont :

$$\tau_{1x} = \sigma(h/2) \quad \text{et} \quad \tau_{2x} = \sigma_{xz}(-h/2) \quad (2. 30)$$

$$\tau_{1y} = \sigma_{yx}(h/2) \quad \text{et} \quad \tau_{2y} = \sigma_{yz}(-h/2)$$

La masse surfacique du stratifié au point (x,y) :

$$\begin{aligned} \rho_s &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k dz = \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}), \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \end{aligned} \quad (2. 31)$$

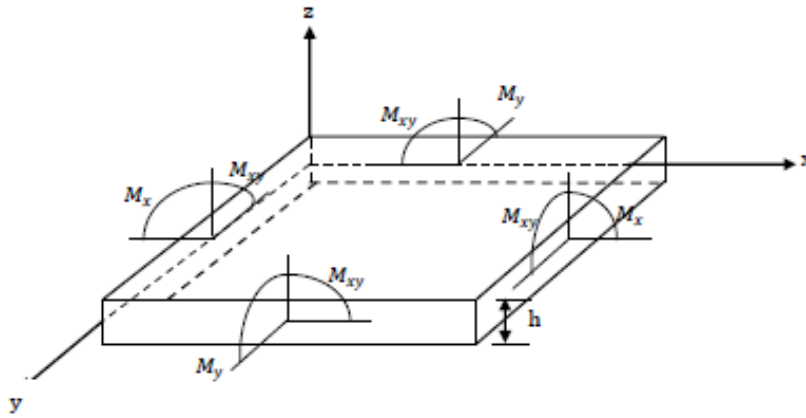
#### IV.2.2 Comportement en flexion et torsion :

✓ Résultantes en flexion :

Les relations fondamentales des stratifiés font également intervenir les moments résultantes sur un élément du stratifié. Les moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (2. 32)$$

Les composantes  $M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion suivant la direction  $x$  et  $y$ , respectivement, et la composante  $M_{xy}$  est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la figure (3.3)

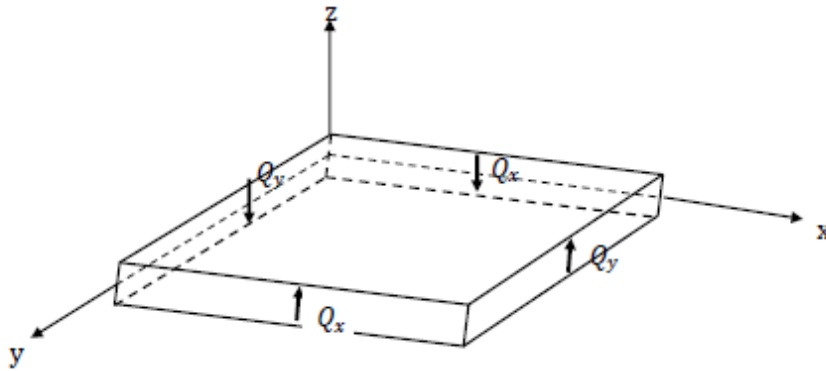


**Figure IV-3 : Schématisation des moments de flexion et de torsion**

✓ Résultante en cisaillement :

Les résultantes en cisaillement sont définies par unités de longueur du stratifié :

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{bmatrix}_k dz \quad (2. 33)$$



**Figure IV-4 : schématisation des résultantes en cisaillement**

Comme les résultantes en membranes et les résultantes en flexion, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié.

En multipliant les équations d'équilibre par  $Z$  puis les intégrer suivant l'épaisseur du stratifié, conduit aux relations fondamentales de mouvement relatives aux résultantes en flexion. (DECOLON 2000)

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_o}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (2. 34)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_o}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}$$

Avec  $P_x$  et  $P_y$  les composantes des moments des forces volumiques exercées :

$$P_x = \int_{-h/2}^{h/2} Z p_x dz \quad \text{et} \quad P_y = \int_{-h/2}^{h/2} Z p_y dz \quad (2.35)$$

La grandeur  $I_{xy}$  est le moment d'inertie par rapport au plan moyen (oxy) du stratifié localisé aux points (x,y) et ayant des cotés égaux à l'unité, et s'écrit :

$$I_{xy} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (2.36)$$

L'intégration suivant l'épaisseur du stratifié de la troisième équation conduit à :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_o}{\partial t^2} \quad (2.37)$$

D'où  $q$  est la différence entre les composantes de pression exercées sur chaque face du stratifié :  $\sigma_{zz}(h/2)$  et  $\sigma_{zz}(-h/2)$

$$F_z = \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz$$

Avec :

Une relation indépendante des résultantes de cisaillement suivant :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_o}{\partial t^2} + R \left( \frac{\partial^3 u_o}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_o}{\partial x \partial t^2} + I_{xy} \left( \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right) \right) \quad (2.38)$$

Dans la plupart des cas, les termes d'inertie de rotation peuvent être négligés et, en absence de forces volumiques et de contraintes de cisaillement sur les faces, l'équation (2.38) se simplifie à :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_o}{\partial t^2} \quad (2.39)$$

## V. Application à une poutre sandwich

On considère une poutre soumise à un chargement statique en flexion 3 points et en flexion 4 points constituée d'une âme en polystyrène de 10mm d'épaisseur et de deux peaux composées de 10 plis d'épaisseur 0.125mm et d'empilement  $[90^\circ, 0^\circ]_5$  pour la peau inférieure et  $[0^\circ, 90^\circ]_5$  pour la peau supérieure. Le repère  $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  est un repère d'orthotropie pour les peaux et l'âme.

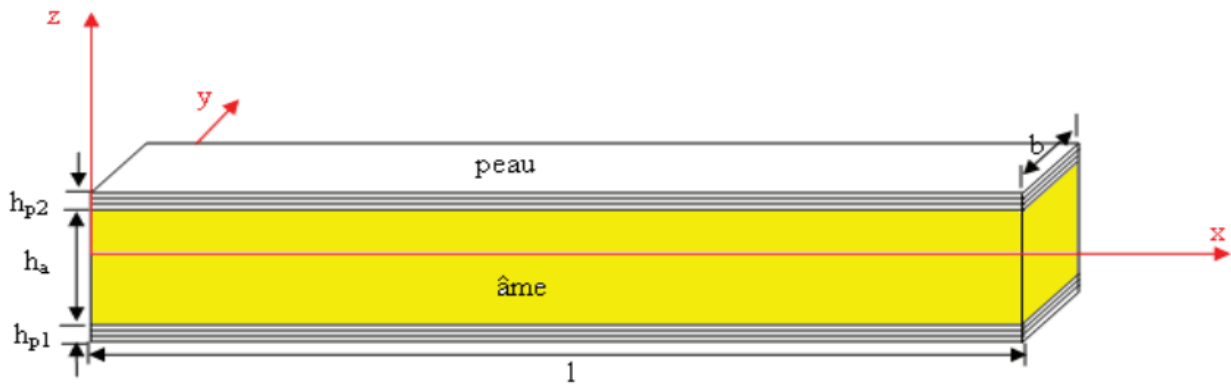


Figure V-1 : structure de la poutre sandwich en peaux stratifiées

$$E_1 = 57 \text{ GPa}, E_2 = 9 \text{ GPa}, G_{12} = 5,2 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0,28, \nu_{21} = 0,044$$

(OLODO 1992)

$$h_a = 10 \text{ mm}, h_{p1} = h_{p2} = 0,75 \text{ mm}, l = 6 \text{ m}$$

l'épaisseur du pli du stratifié est  $h_c = 0,125 \text{ mm}$

### ❖ Semelles orthotropes

Les semelles ou peaux de la poutre sandwich sont des plaques orthotropes stratifiées. Ainsi les renforts utilisés sont des fibres longues en tissu de verre orientées selon la séquence d'empilement suivante  $[90^\circ, 0^\circ]_5$  pour la peau supérieure et pour la peau inférieure. Le nombre indiqué en indice (5) de la séquence d'empilement veut signifier le nombre de plis de la plaque stratifiée. La semelle a une épaisseur totale  $h_p = 0,75 \text{ mm}$ .

### ❖ Ame isotrope

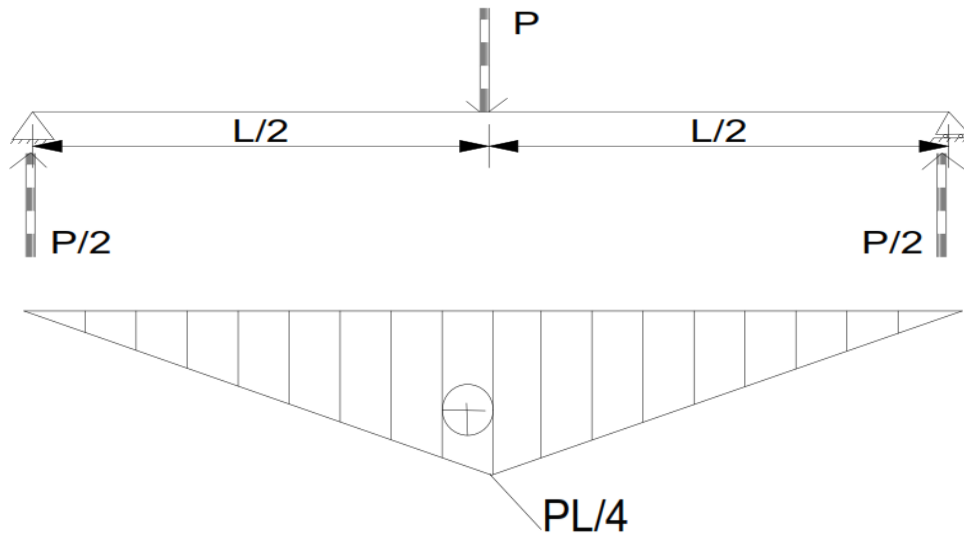
L'âme qui constitue l'élément intermédiaire de la poutre sandwich est un polystyrène. Lorsque les structures sandwichs constituées d'une âme polystyrène

sont soumises à un chargement, les efforts en flexion sont absorbés par les deux peaux tandis que les efforts en cisaillement se répartissent entre les peaux et l'âme.



*Figure V-2 : Photographie d'une âme en polystyrène*

### V.1 Calcul en flexion 3 trois points



*Figure V-3 : schéma statique de la poutre sandwich en flexion 3-points*

$$P = 550N$$

A mi- portée de la poutre on a :

$$M_{\max} = \frac{PL}{4} \quad \text{à } x = \frac{l}{2}$$

Détermination de la flèche maximale de la poutre sandwich :

$$w_{\max} = \frac{PL^3}{48b} D_{11}^* \quad \text{à } x = \frac{l}{2} \quad (2.40)$$

Détermination du module d'Young en flexion de la poutre :

$$E_x = \frac{PL^3}{4bh^3 w_{\max}} \quad (2.41)$$

Calcul des contraintes dans la couche k des semelles stratifiées de la poutre sandwich

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}^k = -3 a_{xx}^k \frac{PL}{bh^3} z \\ \sigma_{yy}^k = -3 a_{yy}^k \frac{PL}{bh^3} z \\ \sigma_{xy}^k = -3 a_{xy}^k \frac{PL}{bh^3} z \end{array} \right\} \text{ à } x = \frac{l}{2} \quad (2.42)$$

Avec

$$a_{xx}^k = \bar{Q}_{11}^K D_{11}^* + \bar{Q}_{12}^K D_{12}^* + \bar{Q}_{16}^K D_{16}^*$$

$$a_{yy}^k = \bar{Q}_{12}^K D_{11}^* + \bar{Q}_{22}^K D_{12}^* + \bar{Q}_{26}^K D_{16}^* \quad \text{Et}$$

$$a_{xy}^k = \bar{Q}_{16}^K D_{11}^* + \bar{Q}_{26}^K D_{12}^* + \bar{Q}_{66}^K D_{16}^*$$

La détermination du tenseur de rigidité  $D$

$$D = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k Q(\delta_k) \quad \text{Avec } d_k = 12k(k-n-1) + 4 + 3n(n+2).$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Nous inversion l'expression (2.44) et on a :

$$D^* = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \quad \text{Avec}$$

$$\Delta = D_{11} D_{22} D_{66} - D_{11} D_{26}^2 - D_{12}^2 D_{66} + 2D_{12} D_{16} D_{26} - D_{16}^2 D_{22}$$

Par application, déterminons le tenseur de rigidité

☞ **Tenseurs  $Q_k$**

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad \nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}$$

$$Q_{11} = 57,714 \text{ GPa}, \quad Q_{22} = 9,113 \text{ GPa}, \quad Q_{12} = 2,552 \text{ GPa}, \quad Q_{66} = 5,2 \text{ GPa}$$

$$Q_{(0^\circ)} = \begin{pmatrix} 57,714 & 2,552 & 0 \\ 2,552 & 9,113 & 0 \\ 0 & 0 & 5,2 \end{pmatrix} \times 10^3 \text{ MPa}$$

Pour le calcul du tenseur  $\mathbf{D}$ , procédons au changement de repère du tenseur  $Q_k$

$$Q_{(90^\circ)} = \begin{pmatrix} 9,113 & 2,552 & 0 \\ 2,552 & 57,714 & 0 \\ 0 & 0 & 5,2 \end{pmatrix} \times 10^3 \text{ MPa}$$

Pour le calcul du tenseur de rigidité en flexion  $\mathbf{D}$ , nous déterminons d'abord les valeurs de  $d_k$ . Ce qui nous donne :

$d_k, k=1, \dots, 5$

$$d_1 = d_5 = 49$$

$$d_2 = d_4 = 13$$

$$d_3 = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} 9,685 & 0,519 & 0 \\ 0,519 & 3,911 & 0 \\ 0 & 0 & 1,261 \end{pmatrix} \times 10^{-10} \text{ MN.m}$$

Déterminons l'inverse de cette matrice par l'expression (2.53) :

$$D^* = \begin{pmatrix} 103989 & -13804 & 0 \\ -13804 & 257540 & 0 \\ 0 & 0 & 792979 \end{pmatrix} \times 10^4 \frac{1}{\text{MN.m}}$$

Alors

$$D_{11}^* = 103989 \times 10^4 \frac{1}{\text{MN.m}}$$

Calcul de la flèche

$$w_{\max} = \frac{55 \times 10^{-1} \cdot 6^3}{48 \times 0,075} \times 103989$$

$$w_{\max} = 0,019329966 \text{ m}$$

Détermination du module d'Young en flexion de la poutre :

$$E_x = \frac{55 \times 10^{-5} \cdot 0,23^3}{4 \times 0,075 \times (1,5 \times 10^{-3})^3 \times 0,019329966}$$

$$E_x = 75,875 \text{ MPa}$$

$$a_{xx}^k = 9124088229$$

$$a_{yy}^k = -7966804977$$

$$a_{xy}^k = 0$$

Détermination du tenseur de contrainte

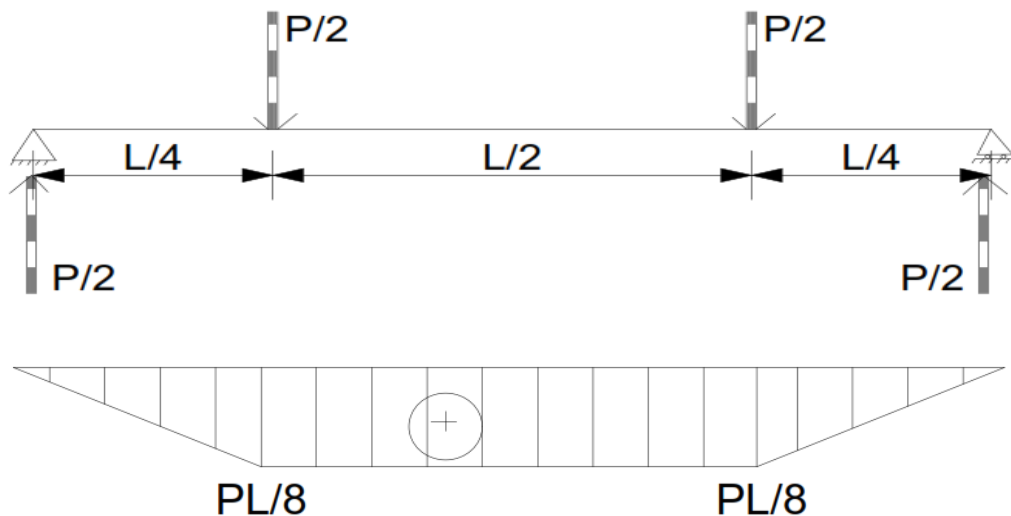
$$\sigma_{xx}^k = -3 \times 9124088229 \times \frac{55 \times 10^{-5} \cdot 0,23}{0,075 \times (1,5 \times 10^{-3})^3} \times 0,125 \times 10^{-3} = -1,28467 \times 10^{16} \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy}^k = -3 \times (-7966804977) \times \frac{55 \times 10^{-5} \cdot 0,23}{0,075 \times (1,5 \times 10^{-3})^3} \times 0,125 \times 10^{-3} = 1,12173 \times 10^{16} \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xy}^k = 0$$

## V.2 Calcul en flexion 4 points

Nous représentons le schéma statique de la poutre en flexion 4-points :



*Figure V-4 : schéma statique de la poutre sandwich en flexion 4-points*

Détermination de la flèche

P est la charge totale exercée au milieu de la poutre et on a :

$$\frac{d^2 w_o}{dx^2} = \frac{d^2 w_1}{dx^2} = -\frac{M}{E_x I} = \frac{px}{2E_x I}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

$$\frac{d^2 w_o}{dx^2} = \frac{d^2 w_2}{dx^2} = -\frac{M}{E_x I} = \frac{px}{8E_x I}, \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$$
(2. 45)

En introduisant

$$w_o = w_1 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{L}{4}$$

$$w_o = w_2 \quad \text{pour } \frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2}$$

Etant donné avec les appuis simples, les conditions aux frontières sont pour  $x=0$  :

$$M=0 \quad w_1=0$$

La symétrie impose que la pente de la déformée s'annule au centre de la poutre soit pour  $x=L/2$  :

$$\frac{dw_2}{dx} = 0$$

$$\text{et pour } x = \frac{L}{4}$$

$$w_1 = w_2, \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{dx}$$

En intégrant les expressions (2.27) on a :

$$w_1 = -\frac{PL^3}{192E_x I} x \left[ 9 - 16 \left( \frac{x}{1} \right)^2 \right]$$

$$w_2 = -\frac{PL^3}{768E_x I} x \left[ 1 - 48 \frac{x}{1} + \left( \frac{x}{1} \right)^2 \right]$$
(2. 46)

Ces expressions permettent de déterminer la flèche  $w_q$  au point  $x=l/4$  et la flèche  $w_c$  au centre  $x=l/2$  :

$$w_q = \frac{PL^3}{96E_x I} = \frac{PL^3}{96b} D_{11}^*$$

$$w_c = \frac{11PL^3}{768E_x I} = \frac{11PL^3}{768b} D_{11}^*$$
(2. 47)

Détermination du module d'Young en flexion de la poutre :

Ces relations peuvent être utilisées pour déterminer soit le module de flexion de la poutre, soit le coefficient  $D_{11}^*$  à partir de la mesure des flèches  $w_q$  ou  $w_c$ .

$$E_x = \frac{PL^3}{96Iw_q} = \frac{PL^3}{8bh^3w_q} \quad (2.48)$$

$$E_x = \frac{11PL^3}{768Iw_c} = \frac{11PL^3}{64bh^3w_c}$$

Calcul des contraintes dans la couche k des semelles stratifiées de la poutre sandwich

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}^k = -6 a_{xx}^k \frac{Px}{bh^3} z \\ \sigma_{yy}^k = -6 a_{yy}^k \frac{Px}{bh^3} z \\ \sigma_{xy}^k = -6 a_{xy}^k \frac{Px}{bh^3} z \end{array} \right\} \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{4} \quad (2.49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}^k = -\frac{3}{2} a_{xx}^k \frac{PL}{bh^3} z \\ \sigma_{yy}^k = -\frac{3}{2} a_{yy}^k \frac{PL}{bh^3} z \\ \sigma_{xy}^k = -\frac{3}{2} a_{xy}^k \frac{PL}{bh^3} z \end{array} \right\} \quad \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (2.50)$$

Avec

$$\begin{aligned} a_{xx}^k &= \bar{Q}_{11}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{12}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{16}^k D_{16}^* \\ a_{yy}^k &= \bar{Q}_{12}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{22}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{16}^* \\ a_{xy}^k &= \bar{Q}_{16}^k D_{11}^* + \bar{Q}_{26}^k D_{12}^* + \bar{Q}_{66}^k D_{16}^* \end{aligned} \quad (2.51)$$

Par application, déterminons le tenseur de rigidité

☞ **Tenseurs  $Q_k$**

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad \nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}$$

$$Q_{11} = 57,714 \text{ GPa}, \quad Q_{22} = 9,113 \text{ GPa}, \quad Q_{12} = 2,552 \text{ GPa}, \quad Q_{66} = 5,2 \text{ GPa}$$

$$Q_{(0^\circ)} = \begin{pmatrix} 57,714 & 2,552 & 0 \\ 2,552 & 9,113 & 0 \\ 0 & 0 & 5,2 \end{pmatrix} \times 10^3 \text{ MPa}$$

Pour le calcul du tenseur  $\mathbf{D}$ , procédons au changement de repère du tenseur  $Q_k$

$$Q_{(90^\circ)} = \begin{pmatrix} 9,113 & 2,552 & 0 \\ 2,552 & 57,714 & 0 \\ 0 & 0 & 5,2 \end{pmatrix} \times 10^3 \text{ MPa}$$

Pour le calcul du tenseur de rigidité en flexion  $\mathbf{D}$ ,

nous déterminons d'abord les valeurs de  $d_k$ . Ce qui nous donne :

$d_k, k=1, \dots, 5$

$$d_1 = d_5 = 49$$

$$d_2 = d_4 = 13$$

$$d_3 = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} 9,685 & 0,519 & 0 \\ 0,519 & 3,911 & 0 \\ 0 & 0 & 1,261 \end{pmatrix} \times 10^{-10} \text{ MN.m}$$

Déterminons l'inverse de cette matrice par l'expression (2.53) :

$$D^* = \begin{pmatrix} 103989 & -13804 & 0 \\ -13804 & 257540 & 0 \\ 0 & 0 & 792979 \end{pmatrix} \times 10^4 \frac{1}{\text{MN.m}}$$

Alors

$$D_{11}^* = 103989 \times 10^4 \frac{1}{\text{MN.m}}$$

Calculons la flèche  $w_q$  au point  $x=l/4$  et la flèche  $w_c$  au centre  $x=l/2$  :

$$w_q = \frac{55 \times 10^{-1} \times 6^3}{96 \times 0,75} \times 1039899 \Rightarrow w_q = 0,009665 \text{ m}$$

$$w_c = \frac{11 \times 55 \times 10^{-1} \times 6^3}{768 \times 0,75} \times 1039899 \Rightarrow w_c = 0,013289 \text{ m}$$

Déterminons le module de flexion de la poutre :

$$E_x = \frac{55 \times 10^{-1} \times 0,23^3}{8 \times 0,75 \times (11,5 \times 10^{-3})^3 \times 0,009665}$$

$$E_x = 75,875 \text{ MPa}$$

$$a_{xx}^k = 9124088229$$

$$a_{yy}^k = -7966804977$$

$$a_{xy}^k = 0$$

Calcul des composantes du tenseur de contrainte par la formule (2.34)

$$\sigma_{xx}^k = -\frac{3}{2} \times 9124088229 \times \frac{55 \times 10^{-5} \cdot 0,23}{0,075 \times (11,5 \times 10^{-3})^3} \times 0,125 \times 10^{-3} = -6,4233 \times 10^{15} \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy}^k = -\frac{3}{2} \times (-7966804977) \times \frac{55 \times 10^{-5} \cdot 0,23}{0,075 \times (11,5 \times 10^{-3})^3} \times 0,125 \times 10^{-3} = 5,60865 \times 10^{15} \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xy}^k = 0$$

### V.3 Analyse des résultats

Après les calculs en flexion 3-points et en flexion 4-points il ressort l'analyse qui suit :

Notons que plusieurs paramètres ont été calculés dans chacun des deux cas.

Il s'agit de modules d'Young ; les flèches et les tenseurs de contrainte.

- Le module d'Young dans le cas de flexion en 3-points a donné le même résultat que dans le cas de la flexion 4-points.
- La valeur de la flèche est plus grande dans le cas de la flexion 3-points que dans la flexion 4-points.

- La valeur de la contrainte normale suivant l'axe  $xx$  de la flexion en 3-points est supérieur à celle en 4-points.
- La valeur de la contrainte normale en 3-points est inférieure à celle en 4-points suivant l'axe  $yy$
- Les contraintes tangentielles dans les deux cas sont nulles justement parce qu'il n'y a pas de moment de torsion.

## CONCLUSION

Ce travail a eu pour objectif d'étudier le comportement mécanique d'une poutre sandwich en matériaux composites anisotropes lorsqu'elle est soumise à une sollicitation statique.

Nous avons procédé par la méthode de calcul par flexion 3-points et flexion 4-points afin de comparer les différents résultats obtenus dans chaque cas à partir de la détermination des flèches ; des modules d'Young en flexion et des tenseurs de contrainte.

Le calcul de la flèche au centre de la poutre sandwich en flexion 3-points est supérieur à celle obtenue au même point en flexion 4-points.

Toutes les contraintes normales calculées dans les deux modes de sollicitation suivant l'axe (xx) sur la poutre sandwich sont toutes négatives tandis que celles calculées suivant l'axe (yy) sont positives.

Les contraintes tangentielles dans les deux cas sont nulles.

En définitive les fibres supérieures de la poutre sont comprimées et les fibres inférieures sont tendues lors des sollicitations statiques d'une poutre sandwich en matériaux composites anisotropes.

## Références bibliographiques

- ALLEN, H.G. "Analysis and design of structural sandwich Panels",. Pergamon Press. Oxford, 1969.
- AVILA, A. F. "composites structures, Mémoire." 2007.
- BERTHELOT, J.M. *Matériaux Composites "comportement mécanique et analyse des structures"*. Tec&Doc, Paris, 2005.
- BEZAZI, A. *Analyse de l'endommagement des stratifiés en flexion 3-points. influence de la séquence d'Empilement,*. éd. 2. Paris, 2001.
- CHATAIN, M. *Présentation Générale des Matériaux Composites, Techniques de l'ingénieur, Traité Plastique et Composites, AM 5000.* 2001.
- DAI, J., HAHN H. "composites structure." Université de versailles, MONTREAL, 2003.
- DECOLON, C. *Structures Composites "calcul des plaques et des poutres multicouches"*,. Hermes Science, Paris, 2000.
- DRID A, ALRAOU A. "Contribution à la modélisation des structures tri-couches par la théorie locale. Etude sur les alternatives de valorisation des résidus., Mémoire." Montréal, 2008.
- ELRAOUG. A., DRID A. "Contribution à la modélisation des structures tri-couches par la théorie locale, Mémoire." Montréal, 2008.
- MR, B. R. "Caractérisation d'un panneau sandwich à ame en liège et peaux jute/époxy., mémoire." Paris: Herme Science, Octobre, 2011.
- OLODO, E.T. "Méthode d'évaluation de la résistance à long terme d'éléments de structures en matériaux anisotropes." Moscou: thèse de Doctorat, Université de l'Amitié, 1992.
- OUADDAY, R. *étude des structures sandwichs verre/époxy de grandes épaisseurs utilisées comme extension d'avant directrices de turbines hydroélectriques., Mémoire.* 2003.
- SALIHA, K. *Etude de l'effet du cisaillement transverse sur le comportement mécanique de poutres composites, Mémoire.* Université Mentouri-Constantine, 2010.
- SOLA, M. "Caractérisation des matériaux composites à structure sandwich comportant des modifications ." Université de versailles, Montréal, Avril 2011.

THEILLOUT J., COURBON J. *"Résistance des matériaux" Techniques de l'ingénieur, traité Construction*. Tec&Doc, Paris, 2006.

VACCUNI, P. *Méthodes d'analyse et de conception. Matériaux composites structuraux*. Université de versailles, 2001.

.