



**UNIVERSITE D'ABOMEY-CALAVI**

\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*

**ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR**

\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*

**Master de Recherche en Efficacité Energétique et énergies renouvelables**

\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*\_\*

**Rapport de Stage**

**Thème :**

**Modélisation d'une Machine Stirling à Pistons Libres**

**Présenté par :**

**Euphraïm Sourou DADE**

**Co Encadré par :**

Dr Macaire B.AGBOMAHENA, Maître Assistant des Universités  
Enseignant-Chercheur à l'EPAC/UAC

Dr Christian AKOWANOU, Maître Assistant des Universités  
Enseignant-Chercheur à l'INSPEI/UNSTIM

**Sous direction de:**

Professeur Clément AHAOUANNOU  
Maître de Conférences des Universités

**Année académique: 2016-2017**

## Table des matières

DEDICACE.....	iii
REMERCIEMENTS .....	iv
LISTE DES SIGLES ET ABREVIATIONS .....	v
Liste des tableaux .....	vii
Résumé .....	ix
Abstract.....	x
INTRODUCTION GENERALE.....	1
1. CHAPITRE I : Synthèse bibliographique.....	3
Introduction .....	3
1.1 Historique des Moteurs Stirling.....	3
<b>1.1.1</b> Les différents types de moteur Stirling .....	4
1.2 Atouts et applications du moteur Stirling .....	7
1.3 Revue de littérature .....	10
2 Chapitre II : Modélisation de la machine Stirling à pistons libres .....	17
Introduction .....	17
2.1 Modélisation analytique du moteur Stirling à pistons libres .....	17
<b>2.1.1</b> Description du moteur Stirling .....	17
<b>2.1.2</b> Principe de fonctionnement de la machine Stirling à pistons libres	19
<b>2.1.3</b> Le cycle Stirling théorique idéal du moteur Stirling.....	19
<b>2.1.4</b> Cycle de Stirling.....	22
<b>2.1.5</b> Le régénérateur .....	23
<b>2.1.6</b> Le fluide de travail.....	24
2.2 Modélisation numérique du moteur Stirling à piston libre.....	26
<b>2.2.1</b> Description du modèle.....	26

2.2.2	<b>Equations dynamiques du moteur Stirling</b> .....	27
2.2.3	<b>Solutions des équations du modèle</b> .....	34
2.2.4	Raideur et matrice d'amortissement .....	34
2.2.5	<b>Stabilité : valeurs propres</b> .....	35
3	<b>CHAPITRE III : RESULTATS ET DISCUSSION</b> .....	37
3.1	Validation du modèle.....	37
3.1.1	<b>Comparaison avec les résultats expérimentaux de Monsieur François LANZETA et Madame Sylvie BEGOT</b> .....	37
3.2	Discussion .....	40
4	Conclusion générale.....	41
5	Référence bibliographique .....	42
6	Annexe : Script de MATLAB utilisé pour la programmation.....	45

## **DEDICACE**

Nous consacrons ce modeste travail à :

- Mes chers parents
- Mon feu père Noel DADE .
- Tous mes enfants Oswald DADE, Cornélia DADE , Hospicia, DADE et leur Maman Clarisse HOUNSOU-DOH.
- Tous nos amis
- Tous nos chers enseignants qui nous ont aidé de proche ou de loin.

## REMERCIEMENTS

Nous exprimons toute ma reconnaissance au Tout puissant pour sa clémence et sa miséricorde.

Nous remercions tout le corps enseignant et administratif de l'Ecole Doctorale des Sciences De l'Ingénieur (ED-SDI) qui n'a ménagé aucun effort pour la réussite de notre formation.

Nous exprimons nos profondes gratitude à l'endroit de nos encadreurs :

- Professeur Antoine VIANOU, Professeur titulaire des universités du CAMES, Directeur de l'Ecole Doctorale Sciences de l'Ingénieur.
- Docteur Macaire AGBOMAHENA, Maitre-Assistant, SA de l'Ecole Doctorale qui nous a fait l'honneur de diriger nos travaux et pour son grand soutien.
- Docteur Christian AKOWANOU, Maître Assistant des Universités Enseignant-Chercheur à l'INSPEI/UNSTIM pour son soutien conseils
- Professeur Clément AHOUANNOU, maitre de conférences, Directeur Adjoint de l'EPAC et coordinateur du Master Recherche Efficacité énergétique et énergies renouvelables pour ton soutien.

## LISTE DES SIGLES ET ABREVIATIONS

MSPL : Machine Stirling à Pistons Libres.

Paramètres	Nom	Unité
A	Aire	m <sup>2</sup>
B	Paramètre de calcul	
S	Paramètre de calcul	
$x$	position	m
$\dot{x}$	vitesse	m.s <sup>-1</sup>
$\ddot{x}$	accélération	m.s <sup>-2</sup>
m	masse	kg
C	coefficient de perte	
D	coefficient dissipatif	par unité de masse.s <sup>-1</sup>
$C_p$	Coefficient d'amortisseur visqueux à ressort à gaz du piston	N.s. m <sup>-1</sup>
$C_d$	Coefficient d'amortissement visqueux du déplaceur	N.s. m <sup>-1</sup>
$C_{Hd}$	coefficient d'amortissement visqueux du gaz sur le déplaceur	N.s. m <sup>-1</sup>
$C_{Hp}$	coefficient d'amortissement visqueux du gaz sur le piston	N.s. m <sup>-1</sup>
k	raideurs des ressorts	N.m <sup>-1</sup>
P	pression	Pa
W	travail	J
T	température	K
Re	nombre de Reynolds	
V	volume	m <sup>3</sup>
$\dot{Q}_v$	débit volumique	m <sup>3</sup> /s
M	matrice de passage vers sa forme diagonale	
$\lambda$	valeur propre	
$\omega$	Vitesse de rotation	Rad/s
$\gamma$	Coefficient isentropique	
$\rho$	Densité des gaz	Kgm <sup>3</sup>
$\Lambda$	vecteur de valeurs propres	
$\varphi$	Angle de phase entre deplaceur et le piston	rad
L	Longueur	m
$\mu$	Vitesse du fluide	m/s

## **Indices et exposants**

p piston

d déplaceur

0 condition initiale

Alt alternateur

## Liste des tableaux

<i>Tableau 2-1 : Expressions des coefficients de raideur et coefficients dissipatifs</i> .....	35
<i>Tableau 3-1 : Principales caractéristiques de la MSPL</i> .....	37
<i>Tableau 3-2 : Coefficients des équations différentielles</i> .....	38
<i>Tableau 3-3 : Valeurs propres de la matrice</i> .....	38

## Liste des figures

<i>Figure 1-1 : Schéma du moteur Stirling</i> .....	4
<i>Figure 1-2 : Moteur Stirling alpha [6]</i> .....	5
<b>Figure 1-3 : Coupe d'un moteur Stirling bêta à entraînement rhombique [6]</b> .....	5
<b>Figure 1-4 : Moteur Stirling gamma [6]</b> .....	6
<b>Figure 1-5 : Moteur Stirling à piston libre</b> .....	7
<i>Figure 2-1 : Schéma du MSPL</i> .....	18
<i>Figure 2-2 : Analogie de type masse-ressort</i> .....	18
<b>Figure 2-3 : Diagramme P-V du cycle idéal du moteur Stirling[11]</b> .....	20
<b>Figure 2-4 : Différentes étapes du cycle Stirling [11]</b> .....	21
<b>Figure 2-5 : Fonctionnement d'un MSPL en pompe de chaleur</b> .....	22
<b>Figure 2-6 : Fonctionnement d'une MSPL en machine frigorifique</b> .....	22
<i>Figure 2-7 : Diagramme indicateur d'un moteur STIRLING réel [11]</i> .....	23
<b>Figure 2-8 : Conductivités thermiques des fluides de travail en fonction de la température [14]</b> .....	25
<b>Figure 2-9 : Conductivités thermiques des fluides de travail en fonction de la température [14]</b> .....	25
<b>Figure 2-10 : Viscosités des fluides de travail en fonction de la température [14]</b> .....	26
<b>Figure 2-11 : Définition des volumes et surfaces de MSPL</b> .....	29
<b>Figure 3-1 : Courbes représentatives des positions du déplaceur et du piston</b> .....	39
<b>Figure 3-2 : Courbes représentatives des vitesses du déplaceur et du piston</b> .....	39

## Résumé

Dans le contexte énergétique actuel, nous assistons au développement de technologies de production d'énergie « propre ». Ainsi de nouvelles perspectives comme la conversion thermodynamique de l'énergie solaire ou la valorisation des déchets sont offertes à la recherche sur les « énergies renouvelables ».

Dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons aux moteurs thermiques à apport de chaleur externe : le moteur Stirling notamment le moteur Stirling à pistons libres. C'est un moteur à cogénération.

Ce mémoire présente la modélisation d'un moteur Stirling à pistons libres en mettant l'accent sur l'effet couplé du gaz et des ressorts métalliques. Des modèles analytiques et numériques sont développés.

**Mots clés** : modélisation; moteur ; Stirling ; régénérateur ; déplaceur ; pistons libres

## **Abstract**

In the current energy context, we are witnessing the development of "clean" energy production technologies. Thus, new perspectives such as the thermodynamic conversion of solar energy or the recovery of waste are offered to research on "renewable energies". As part of our study, we are interested in heat engines with external heat input: the Stirling engine, including the Stirling engine with free pistons. This thesis presents the modeling of a free-piston Stirling engine with emphasis on the coupled effect of gas and metals prings. Analytical and numerical models are developed.

**Keywords:** modelization; engine; Stirling; regenerator; displacer; free pistons

## INTRODUCTION GENERALE

Les combustibles fossiles répondent aujourd'hui à la majeure partie de la demande énergétique mondiale, mais en raison de l'épuisement rapide de ces combustibles et de considérations environnementales, l'intérêt pour les sources d'énergie alternatives et les systèmes efficaces de conversion énergétique a considérablement augmenté. Entre autres, la cogénération est un moyen de production combinée d'électricité et de chaleur.

Il existe de multiples solutions de cogénération avec des installations de turbines à gaz ou à vapeur, des moteurs thermiques à combustion interne. Les piles à combustibles et les machines Stirling (ou voisines ayant une combustion externe) [1] sont idéales pour la micro-cogénération.

Parmi les technologies concurrentes, les moteurs Stirling sont de bons candidats en raison de leur efficacité élevée, de leur bonne performance à charge partielle, de leur flexibilité, de leurs faibles vibrations et niveau de bruit.

En général, les installations de micro-cogénération existantes intègrent des machines Stirling de technologie avérée avec un entraînement mécanique des pistons.

Le moteur de type Stirling est le moteur thermique développé par Robert Stirling en 1816. Il utilise une source externe d'énergie pour chauffer le gaz contenu dans un cylindre. Par conséquent, il peut utiliser plusieurs types de sources de chaleur y compris l'énergie solaire, les biocarburants,...Par conséquent, ces moteurs sont très indiqués pour la conversion d'énergies renouvelables. [2]

Dans le contexte environnemental actuel, ce moteur devient donc pertinent, et il est d'ailleurs l'objet de récents projets industriels et de recherche. Cependant, bien qu'il soit apparu en 1816, le moteur Stirling reste très peu développé aujourd'hui et on lui préfère encore largement les moteurs à explosion qui possèdent pourtant une efficacité énergétique inférieure.

Le moteur Stirling à piston libre (MSPL) conçu par W. Beale [3], présente plusieurs avantages, entre autres, une conception mécanique simple, une charge latérale très faible qui réduit son usure et par conséquent une durée de fonctionnement prolongée comparée aux moteurs classiques.

Un aspect intéressant dans l'utilisation de ce moteur, est son alimentation par de l'énergie solaire comme source thermique, gisement disponible dans les pays tropicaux [4].

Ces machines sont actuellement développées pour de nombreuses applications (cogénération) dans le secteur de la thermique, ce qui inclut les pompes à chaleur, les convertisseurs électriques solaires, les générateurs de puissance électrique et les pompes à eaux. Un générateur électrique peut également être associé pour compléter le dispositif dans le cas de la cogénération.

C'est dans le but de prédire les performances du moteur Stirling à pistons libres pour ses applications de micro-cogénération, que le présent sujet :

« Modélisation d'une machine Stirling à pistons libres » nous a été donné. Au cours de ce travail, la stabilité du moteur Stirling à pistons libres vis-à-vis des variations de charge est étudiée par l'analyse des valeurs propres de la matrice issue de l'équation d'état.

Les points suivants constituant le contenu du rapport de stage de Master recherche sont :

- La synthèse bibliographique
- La modélisation de la machine Stirling à pistons libres
- Résultats et discussion

# CHAPITRE I : Synthèse bibliographique

## Introduction

Le département ENERGIE de l'institut FEMTO-ST ainsi que GDF SUEZ et le laboratoire SATIE mènent depuis plusieurs années des travaux sur la micro-cogénération domestique sur la base de machine Stirling à pistons libres.

Nombreux sont les chercheurs ayant travaillé sur la machine Stirling depuis son invention en 1816 par Robert Stirling pour son amélioration et pour diverses applications.

Nous essayerons de faire dans un premier temps l'histoire des moteurs Stirling et dans second temps faire la revue de littérature.

### 1.1 Historique des Moteurs Stirling

Au début du XIX<sup>e</sup> siècle, les chaudières à vapeur n'étaient pas très performantes et explosaient souvent. Pour répondre à ce problème, Robert Stirling, un Pasteur, inventa un moteur sans chaudière. La chaleur est apportée de l'extérieur de la machine ce qui réduit les risques d'explosions, car il est inutile de faire chauffer l'eau dans une chaudière à haute pression, puisque chauffer l'air par combustion suffit pour alimenter ce moteur en énergie. C'est ainsi que Stirling déposa son brevet le 27 septembre 1816. La mise en place d'un régénérateur dans la tuyauterie du moteur a permis d'éviter trop de pertes d'énergies, améliorant son rendement.

En 1843, son frère James Stirling, industrialisa ce moteur pour une utilisation dans l'usine où il était ingénieur. Toutefois, en raison d'une puissance trop faible par rapport à la machine à vapeur et plus tard, un moteur à combustion interne, le moteur à air chaude de Stirling ne fut alors plus qu'un objet d'étude pour le physicien, qui comprendront le fonctionnement du moteur Stirling bien après son invention, avec l'avènement de la thermodynamique.

En 1871, les progrès de la thermodynamique accomplis au XIX<sup>e</sup> siècle permettant à Gustav Schmidt de décrire mathématiquement le cycle de Stirling. C'est toutefois dans les années 1939 grâce aux recherches de la compagnie Philips, que le moteur Stirling fut de nouveau étudié sérieusement et que son application de toute sorte de technologies soit testée.

En 1938, un moteur Stirling de plus de 200 chevaux et dont le rendement était supérieur à 30% fut créé dont l'application n'était qu'en cryogénie.

Ce n'est que dans les dernières décennies que les développements du moteur ont commencé à être intéressants pour l'industrie à cause du besoin sociétal croissant pour les sources d'énergies alternatives.

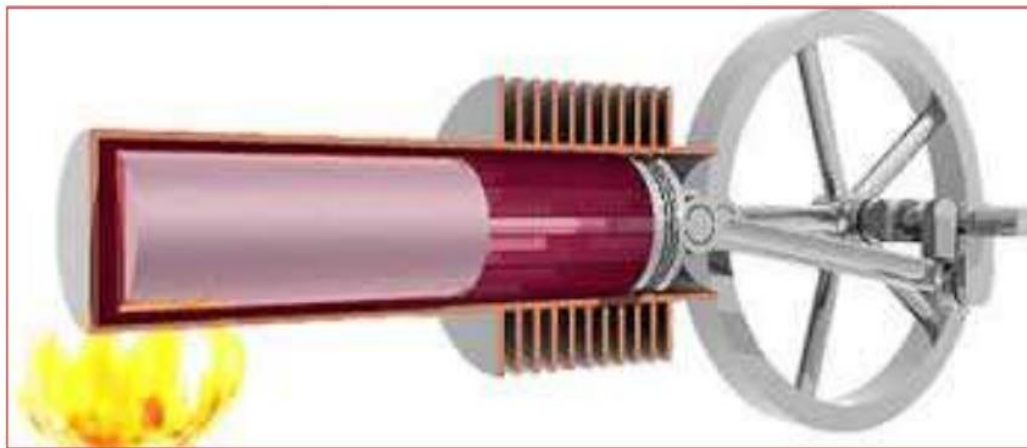


Figure 1-1 : Schéma du moteur Stirling

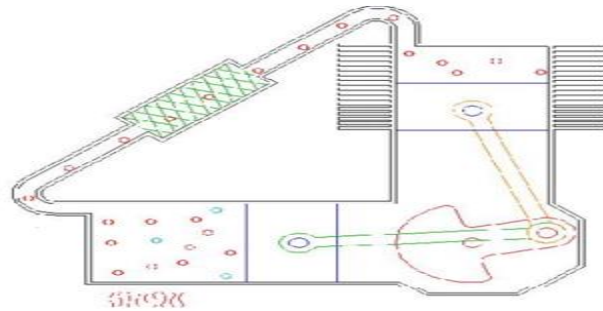
### **1.1.1** *Les différents types de moteur Stirling*

Plusieurs configurations du moteur Stirling ont été développées au fil des années dont les plus populaires sont le type alpha, beta, gamma et le moteur Stirling à piston libre.

#### **1.1.1.1** Le moteur alpha

Le moteur alpha (figure 1-3) est un moteur composé de deux pistons moteurs qui se déplacent dans deux cylindres différents. Les pistons sont placés avec un angle de 90° afin que le piston de la source froide soit en retard de ¼ de tour sur le piston de la source chaude [5]. L'un des cylindres représente la chambre

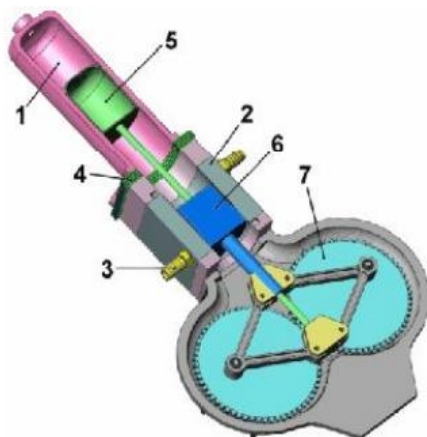
de détente (source chaude) et l'autre la chambre de compression (source froide). Dans cette configuration, le gaz se déplace entre les deux pistons en traversant un régénérateur. Ce régénérateur récupère l'énergie du gaz chaud lorsque cet air est expulsé vers la source froide et la transmet dans le trajet inverse. Ceci permet d'éviter les pertes calorifiques.



**Figure 1-2** : Moteur Stirling alpha [6]

### 1.1.1.2 Le moteur Stirling beta

Le moteur Stirling beta (figure 3) est constitué d'un unique cylindre qui contient la chambre de détente et celle de compression. Dans cette configuration, on a un déplaceur et un piston de travail qui sont coaxiaux. Le déplaceur a pour rôle de faire passer le fluide de travail de la chambre chaude à la chambre froide et vice versa en utilisant le minimum de travail du cycle. Dans cette configuration, le travail est produit uniquement par le piston de travail. Le régénérateur pour le Stirling beta est placé en général à la circonférence du déplaceur et joue le même rôle que dans le cas du Stirling alpha.

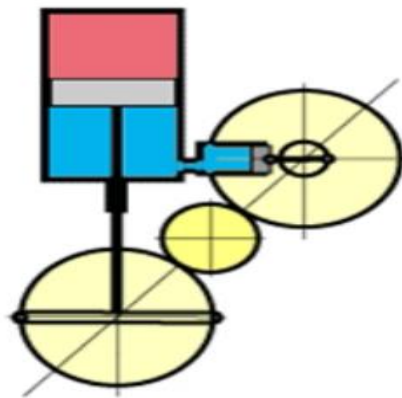


- 1- Paroi du cylindre chaud
- 2-Paroi du cylindre froid
- 3-Tuyaux d'entrée et de sortie du liquide de refroidissement
- 4- Isolation thermique séparant les deux extrémités du cylindre
- 5- Piston de déplacement
- 6- Piston Moteur
- 7- Vilebrequin et volant d'inertie couplés

**Figure 1-3** : Coupe d'un moteur Stirling bêta à entraînement rhombique [6]

### 1.1.1.3 Le moteur Stirling gamma

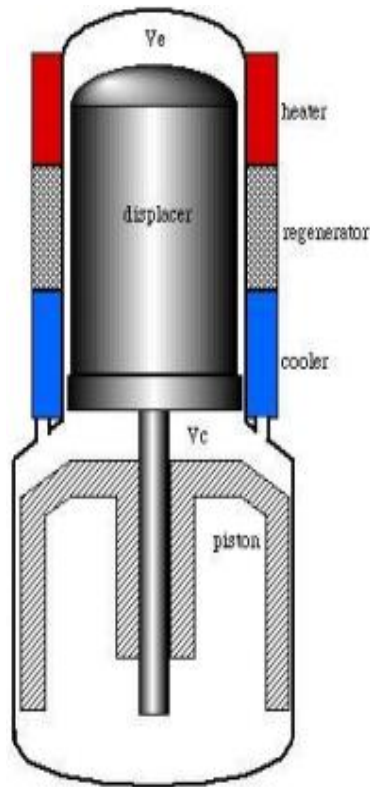
Le moteur Stirling gamma (figure 3-4) est constitué de deux cylindres. Il est composé d'un piston et d'un déplaceur présent dans un même cylindre mais ne sont pas coaxiaux. Le déplaceur occupe successivement la zone chaude et la zone froide, chassant à chaque fois le gaz vers la zone opposée. Les variations de température que le gaz subit alors engendrent des variations de pression qui mettent en mouvement le piston moteur.



**Figure 1-4** : Moteur Stirling gamma [6]

### 1.1.1.4 Le moteur Stirling à piston libre

Le moteur Stirling à piston libre (figure 1-5) est différent des autres configurations. Le moteur Stirling à piston libre est conçu par W. Beale [3]. En effet, le terme « piston libre » signifie que le piston n'est pas entraîné par un système bielle-manivelle classique, mais un moteur linéaire, générant un mouvement longitudinal du piston. Le moteur Stirling à piston est constitué également comme les autres types de moteurs Stirling d'une chambre de détente (source chaude) et d'une chambre de compression (source froide) et il suit également les quatre phases des autres moteurs Stirling.



**Figure 1-5 :** Moteur Stirling à piston libre

## 1.2 Atouts et applications du moteur Stirling

Les moteurs Stirling possèdent, par rapport à d'autres types de moteurs thermiques, un certain nombre d'atouts parmi lesquels on peut citer les suivants :

- le moteur Stirling accepte tout type de source de chaleur, et en particulier :
  - la chaleur provenant de la combustion de tout type de combustible : solide, liquide, gazeux, biomasse, . . .
  - l'énergie solaire, concentrée ou non
  - l'énergie nucléaire
  - la chaleur provenant d'un stockage thermique, la chaleur géothermique, . . .
- en cas de combustion à la source chaude, celle-ci est externe et continue ; elle peut donc être correctement maîtrisée et les rejets de gaz polluants peuvent être réduits considérablement ;

- les moteurs Stirling actuels ont des performances énergétiques comparables à celles des meilleurs moteurs Diesel de même puissance ;
- il n'y a ni explosions, ni combustion interne :
  - le fonctionnement est donc extrêmement silencieux
  - le couple produit est très régulier et les pièces mécaniques sont moins sollicitées
  - le moteur a une très grande durée de vie
  - le lubrifiant n'est pas contaminé par des résidus de combustion, il n'est donc pas nécessaire de procéder à des vidanges périodiques
  - les besoins en maintenance sont très réduits.
- un coût de fabrication en grande série potentiellement du même ordre de grandeur, voire légèrement plus faible qu'un moteur à combustion interne de puissance comparable.

Il existe une multitude de machines appelées moteur Stirling. Cette multitude se retrouve donc au niveau du champ d'application de ce moteur : il s'étend du cœur artificiel alimenté par un petit réacteur nucléaire implanté dans un corps humain au gros moteur de sous-marin en passant par les installations de récupération sur des effluents gazeux à basse température ou les systèmes de conversion de l'énergie solaire . . .

Les atouts du moteur Stirling lui donnent un avantage dans certains domaines sur ses concurrents et il pourrait y connaître un bel essor. Parmi ces domaines d'applications les plus crédibles, il convient de citer :

- la propulsion des navires et des sous-marins. Plusieurs sous-marins actuellement en service, tant civils que militaires, sont propulsés par des moteurs Stirling cinématique. Outre qu'il est silencieux, le moteur Stirling possède en e et un autre avantage déterminant sur le moteur à combustion interne pour ce type d'application : la chaleur peut être fournie par combustion continue de fuel et d'oxygène sous pression. La chambre de combustion étant pressurisée, les gaz de

combustion peuvent être directement rejetés dans l'eau de mer sans devoir être comprimés au préalable, ce qui accroît considérablement l'autonomie en plongée ;

- la production d'électricité à partir de biomasse en zone rurale. Il y a actuellement un créneau important pour la conversion énergétique de combustible peu noble dans un domaine de puissance de l'ordre de 0,5 kWe à 1MWe à partir de charbon, de combustible industriel, de déchets commerciaux et agricoles ainsi que de la biomasse (bois ou carburant d'origine végétale) ;

- la production d'électricité à basse puissance à partir de combustible fossile pour besoins locaux : campings, bâtiments isolés, marchés, travaux publics, bateaux de plaisance... Les concurrents immédiats du moteur Stirling pour de telles applications sont les moteurs à combustion interne, les éoliennes ou encore le photovoltaïque. Ils ont tous des désavantages comme le bruit, les mauvaises conditions météorologiques ou l'encombrement ;

- la production d'électricité pour véhicules hybrides, le moteur Stirling étant une alternative intéressante à la turbine à gaz ou au moteur à combustion interne pour cette application ;

- la production d'électricité à partir d'énergie solaire pour application stationnaire ; cette application a été particulièrement développée aux Etats-Unis et a bénéficié d'un support important de la NASA. De telles installations peuvent être munies de brûleurs de combustible fossile d'appoint permettant de garantir la production d'électricité quelles que soient les conditions climatiques ainsi que la nuit ;

- la production d'électricité à partir d'énergie solaire pour application spatiale, très étudiée aux Etats-Unis et au Japon. Les satellites artificiels sont de plus en plus gourmands en électricité. Or, la conversion de l'énergie solaire en électricité par cellules photovoltaïques s'effectue avec un mauvais rendement, conduisant à de grandes surfaces de captation. Ces panneaux solaires posent un double problème : il est délicat d'assurer un pointage précis vers le soleil de ces grandes

surfaces. En outre, ces surfaces augmentent la traînée du satellite dans l'atmosphère résiduelle, et donc diminuent sa durée de vie. Il est donc important de trouver des systèmes de conversion d'énergie plus performants. Le moteur Stirling est un candidat potentiel, grâce à ses bonnes performances énergétiques et parce qu'il peut être parfaitement équilibré. A cet égard, il possède un avantage sur les cycles de Rankine à vapeur organique, également étudiés pour ce type d'application, car l'effet gyroscopique provoqué par la rotation de la turbomachine pose problème ;

- la cogénération dans le secteur tertiaire et résidentiel ; les qualités intrinsèques de propreté, de fiabilité, d'absence de besoin de maintenance mais surtout de silence autorisent l'utilisation du moteur Stirling comme élément de cogénération à l'échelle de l'habitat individuel, ce qui n'est pas possible avec les moteurs à combustion interne.

Nombreux sont les chercheurs ayant travaillé sur la machine Stirling depuis son invention en 1816 par Robert Stirling pour son amélioration et pour diverses applications.

### **1.3 Revue de littérature**

En 1994, Ph. NIKA, F.LANZETTA ont menés une étude concernant une machine frigorifique Stirling de petite taille, adaptée à des niveaux thermiques modérés. Une étude comparative des rendements exergétiques et des efficacités du cycle Stirling ainsi que d'un cycle frigorifique classique, le cycle de Hirn, met en évidence l'intérêt que peut avoir une machine frigorifique Stirling. Dans leurs études, ils ont abordé le dimensionnement à l'aide du modèle de Beans qu'ils ont adaptés à la machine frigorifique. Ph. NIKA et F.LANZETTA ont ensuite proposé un algorithme original du dimensionnement de la machine. Enfin, il a été présenté un prototype d'une machine de petite taille de technologie alpha à deux cylindres en V.

La nécessité de réduire les émissions de dioxyde de carbone (CO<sub>2</sub>) et les gaz à effet de serre a conduit à revaloriser les moteurs à combustion externe fonctionnant selon le cycle de Stirling. Les sources d'énergie renouvelables sont ainsi utilisées pour alimenter les machines Stirling et ce pour diverses applications. C'est ainsi que A. HOSHI, S.WAKASHIMA, K. MAEZAWA, I. FUJIMOTO, Y. KIKUOKA et TEZUKA (2005) ont créé une machine Stirling utilisant un combustible issu de la biomasse (le bois) pour la première fois au Japon. Ils ont proposé un système unique de cogénération avec le moteur Stirling qui utilise du biocarburant. Ce système permet de chauffer la chambre chaude à une température d'environ 650°C et un refroidissement d'eau au niveau de la chambre froide jusqu'à 40°C. Dans ces conditions le moteur pouvait générer une puissance électrique de 3kW.

Uriel et Berchowitz ont développé une approche analytique d'un modèle linéarisé pour prédire un fonctionnement linéaire en régime permanent.

A.ASNAGHI, S.M. LADJEVARDI, P.SALEH IZADKHAST et A.H KASHANIA (2012) ont travaillé dans le même sens de l'optimisation de la performance d'un moteur Stirling solaire mais en abordant une analyse thermodynamique.

Ahmadi et al (2015) ont travaillé sur l'optimisation multi-objective des performances d'une machine Stirling solaire par le bilan de l'entropie et de l'entropie générée. Cette étude a conduit dans un premier temps à maximiser le rendement thermique, la puissance générée par la machine Stirling et l'entropie perdue par le système. Dans un second temps, la puissance et l'entropie sont maximisées puis le taux de génération de l'entropie du concentrateur solaire de la machine Stirling est minimisé.

Sylvie BEGOT ; Guillaume LAYES ; François LANZETTA ; Steve DJETEL ; Philippe NIKA et Régis CONTREAU ont réalisé la modélisation d'une machine Stirling à pistons libres pour une application de micro-cogénération domestique. Dans leurs travaux effectués dans le laboratoire FEMTO-ST/ENISYS, ils ont exposé un modèle et un dimensionnement de cette machine

pour cette application. Une étude de la stabilité de la machine vis-à-vis des variations de charge est réalisée par l'analyse des valeurs propres de la matrice issue de l'équation d'état ainsi que la méthode des plans de phase. L'influence des frottements mécaniques secs est également étudiée.

Pour développer un prototype, une modélisation permettant le dimensionnement et la simulation des performances de la machine Stirling à pistons libres a été effectuée. Cette modélisation a pour objectifs principaux le dimensionnement de la machine et l'étude de sa stabilité. Les travaux de modélisation sont fondés sur une approche analytique développée et étudiée au laboratoire.

Une étude de la stabilité basée sur le lieu des racines de l'équation caractéristique, un modèle analytique linéarisé basée sur les valeurs propres de la matrice représentant les équations de la machine Stirling. Ces études ont porté sur un modèle linéaire.

Par rapport à la modélisation, une présentation générale de la machine Stirling a été effectuée. La machine comprend un piston ainsi qu'un déplaceur. A chaque extrémité de la machine se trouvent un échangeur chaud et un échangeur froid. Un régénérateur nécessaire à la réalisation du cycle thermodynamique du gaz complète le dispositif. Des volumes tampons présents sous le piston et dans le déplaceur jouent le rôle de ressorts gazeux. Le piston produit un travail mécanique supposé entraîner un alternateur linéaire.

Les équations du bilan des forces appliquées sur le piston et le déplaceur conduit à deux équations différentielles couplées liant les positions, vitesses et accélérations du piston et du déplaceur. Les forces en présence sur le piston sont les forces de frottement mécanique sec, la force de freinage appliquée par l'alternateur, les forces dissipatives dues aux ressorts gazeux. Les forces en présence sur le déplaceur sont les forces de pression, de frottement mécanique sec, ainsi que les forces dissipatives dues aux ressorts gazeux. La pression dans la chambre de détente est exprimée en fonction de la pression dans la chambre de compression et des pertes de charge dans les échangeurs et le régénérateur. Sous forme condensée, les équations de la dynamique ont été abordées.

Cette modélisation a pour but de prédire les performances de la machine pour l'application de micro-cogénération. Pour cette raison une étude de stabilité en fonction de la puissance mécanique consommée a été réalisée. La modélisation et l'influence des forces de frottement sec ont été présentées.

Sylvie BEGOT; François LANZETTA ; Philippe NIKA et G.LAYES ont travaillé sur le thème : Modélisation et simulation dynamique d'une machine Stirling double effet .Cette étude concerne la modélisation d'une machine Stirling double effet à pistons libres pour une application de micro-génération. Cette machine consiste en deux échangeurs chauds, deux pistons déplaceurs et un unique piston de travail. Le modèle est obtenu en écrivant la loi fondamentale de la dynamique pour les mouvements des pistons et des déplaceurs et en supposant que les volumes de la machine sont isothermes. Un système de trois équations différentielles couplées est obtenu. Le système est analogue à un système masses-ressort non linéaire. Une analyse des résultats du modèle a été faite sur le point de fonctionnement puis une étude de stabilité sur une large gamme de puissance. La stabilité de la machine est analysée à l'aide des valeurs de la matrice d'état représentant le système.

Pour la modélisation, une description de la machine a été faite, une mise en équation suivie d'une résolution a été proposée lors de cette étude.

La machine double effet à pistons libres est présentée sur la figure I-2.Elle consiste en une enceinte sous pression avec trois éléments mobiles : un piston de travail et deux pistons déplaceurs. La machine comporte également deux échangeurs chauds reliés à deux sources de chaleur. L'espace entre chaque déplaceur et échangeur chaud est un volume de détente. Le piston de travail est unique. Les espaces délimités par les déplaceurs et le piston de travail sont les volumes de compression. Les deux parties de la machine ont par conséquent un fonctionnement déphasé. Une phase motrice du piston pour la demi-machine 1 correspond à une phase réceptrice pour la demi-machine 2 et réciproquement. Les mouvements des déplaceurs sont assurés par un système de ressorts gazeux. Les deux –demi moteurs fonctionnent en opposition de phase.

Dans l'équation du piston double effet, le terme correspondant à la pression dans le ressort gazeux  $p_b$  et remplacé par le terme correspond à la pression du volume de compression de l'autre demi-machine. Les équations des déplaceurs sont les même dans les deux cas, au signe près pour le déplaceur 2 de la machine double effet.

Une résolution de ces équations a été effectuée.

Un modèle analytique de la machine a été écrit, le fonctionnement a été étudié et analysé .Ensuite une étude sur le fonctionnement de la machine double effet a été menée. Cette machine est caractérisée par la puissance de freinage appliquée par l'alternateur, la fréquence de fonctionnement, l'amortissement ou non des amplitudes caractérisé par la partie réelle des valeurs propres, le déphasage entre le mouvement du déplaceur et celui du piston et le rapport de déplacement entre le déplaceur et le piston. Ils ont observé que les deux demi-machines fonctionnent sur des parties opposées du cycle dynamique. Les positions du déplaceur et du piston sont tracées à la figure I-2.

Sylvie BEGOT, Guillaume LAYES, Francois LANZETTA, Philippe NIKA, Pierre FRANCOIS, Laurent PREVOND et Marie RUELLAN ont mené une étude sur la modélisation couplée thermique électrique d'un cogénérateur .L'objectif visé est de développer un prototype de micro-cogénérateur dont les performances soient compatibles avec une application de micro-cogénération domestique.

Les machines choisies lors de cette étude sont une machine Stirling à pistons libres pour la partie thermique et une machine asynchrone linéaire tubulaire pour la partie électrique.

La première partie de l'article présente le modèle thermique, la deuxième partie présente le modèle électrique. Le couplage et les résultats ont été exposés dans la dernière partie de l'article.

Une modélisation de la machine Stirling a été décrite brièvement prenant en compte une présentation générale de la machine .Les équations principales de

la machine sont proposées avec les hypothèses suivantes : le mouvement des pistons est sinusoïdal, les transformations sont isothermes, la pression dans le volume de compression est linéarisable, le régénérateur a une efficacité de 100%.

La génératrice asynchrone est une machine linéaire tubulaire. Le stator est composé d'un bobinage triphasé multipolaire. Les conducteurs sont positionnés dans des encoches. Le mover est composé par un cylindre en aluminium. Ce dispositif est lié au piston de la machine thermique. Il est donc animé d'un mouvement de va-et-vient.

Une modélisation de cette machine a été effectuée suivie de l'étude du couplage des modèles. A savoir la machine linéaire à vitesse constante et la machine linéaire avec mouvement alterné. Une étude sur la performance des deux types de machines a été menée. Leur étude a prouvé qu'il est nécessaire de travailler sur la conception des deux machines simultanément pour optimiser le fonctionnement global du Co générateur.

Julien BOUCHER, Philippe NIKA et François LANZETTA ont réalisé la modélisation Thermomécanique d'un moteur Stirling à pistons libres.

Ce travail présente l'étude théorique du comportement dynamique d'un moteur Stirling à pistons libres (MSPL) accouplé avec un alternateur linéaire asynchrone. L'étude paramétrique utilise une modélisation thermomécanique globale d'un moteur Stirling à piston libre, de type simple effet, afin de déterminer les fréquences de fonctionnement et les puissances électriques produites.

Pour une fréquence de fonctionnement de 30 Hz. Durant la phase de dimensionnement, la dynamique interne de la machine est en réalité inconnue puisque aucun système mécanique n'impose ni le déplacement des pistons, ni la phase entre le piston et le déplaceur (au contraire des machines Stirling classiques dont le mouvement de rotation est récupéré).

A travers leur étude, une description et une modélisation de la machine MSPL a été faite.

**De Monte et Benvenuto** [7,8] ont exposé une machine linéaire équivalente dynamiquement à la machine non linéaire. Ceci est fait en introduisant des coefficients linéaires équivalents.

## **Conclusion**

Cette revue de littérature nous permet de dire que la machine Stirling fait l'objet d'étude de plusieurs chercheurs et laboratoires en vue d'améliorer son performance et faire sa vulgarisation.

## **Chapitre II : Modélisation de la machine Stirling à pistons libres**

### **Introduction**

Nous présenterons dans cette partie dans un premier temps la modélisation analytique qui prendra en compte chaque élément de la machine. Dans un second temps la modélisation numérique qui prendra en compte le fonctionnement de chacun des éléments constituant le moteur et les équations qui régissent leurs mouvements.

### **2.1 Modélisation analytique du moteur Stirling à pistons libres**

#### **2.1.1 Description du moteur Stirling**

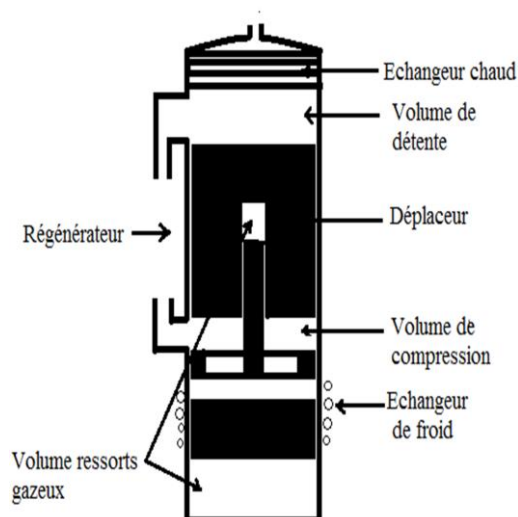
Les machines MSPL [9,10] fonctionnent sans aucune liaison mécanique. Elles comportent généralement un piston de compression et un déplaceur qui est placé à proximité de la source chaude. Les mouvements adéquats sont imposés aux différents éléments de la machine (figure 2-1) par l'effet des pressions et par l'utilisation de l'effet ressort du matelas gazeux. Elles disposent de deux échangeurs thermiques chaud et froid ainsi qu'un régénérateur nécessaire à la réalisation du cycle thermodynamique complet du gaz. Le volume tampon (ressort) présent sous le piston de compression permet de loger tout le dispositif électrique de génération d'électricité. C'est le mouvement d'un aimant, solidaire du piston au sein d'une bobine qui générera un courant électrique. Les fluides de travail utilisés la plupart du temps sont l'hydrogène, l'hélium ou l'air. Le régénérateur est l'élément clef du moteur, c'est un milieu poreux qui amplifie l'onde de pression par effet thermoacoustique.

Le moteur Stirling à piston libre (figure 2-1) est un moteur à énergie externe conçu par W. Beale [9], les avantages que présentent ce moteur, une conception mécanique simple, une charge latérale très faible qui réduit son usure et par conséquent une durée de fonctionnement prolongée comparée aux moteurs

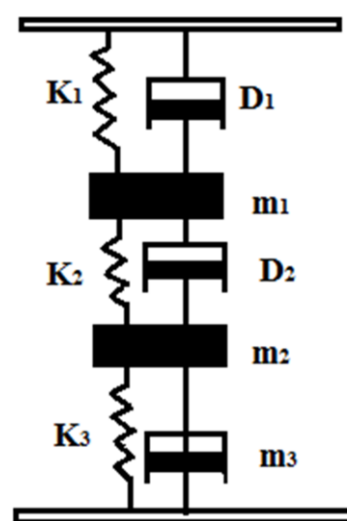
classiques. L'intéressant dans ce moteur est l'utilisation de l'énergie solaire comme source de chaleur, ce qui intéresse les pays où le soleil est abondant.

Il s'agit d'une machine composée de deux (02) chambres (une chambre chaude et une chambre froide) dont le fluide de travail principal est un gaz soumis à un cycle théorique comprenant quatre (04) phases : un chauffage isochore, une détente isotherme, un refroidissement isochore puis une compression isotherme. La succession de ces différentes phases et selon le sens indiquera si la machine fonctionne en moteur ou comme refroidisseur. La machine Stirling peut contenir un échangeur de chaleur particulier : le régénérateur dont la fonction est d'accumuler puis restituer de la chaleur fournie et absorbée au gaz de travail le traversant de la chambre chaude vers la chambre froide et inversement. Pour son fonctionnement, la machine Stirling peut utiliser tout type de source d'énergie thermique : les combustibles fossiles ou les énergies renouvelables comme le solaire, la biomasse, etc...

De même les applications faites à partir du moteur Stirling sont nombreuses et diversifiées. On peut citer la production de l'électricité, la cogénération, la production du froid, cryogénie, etc...



**Figure 2-1** : Schéma du MSPL



**Figure 2-2** : Analogie de

### **2.1.2 Principe de fonctionnement de la machine Stirling à pistons libres**

Le principe de fonctionnement est simple et décrit comme suit: le fluide principal de travail est un gaz (air, hydrogène ou hélium) soumis à un cycle comprenant quatre phases : compression isotherme, chauffage isochore (à volume constant), détente isotherme (à température constante) puis un refroidissement isochore.

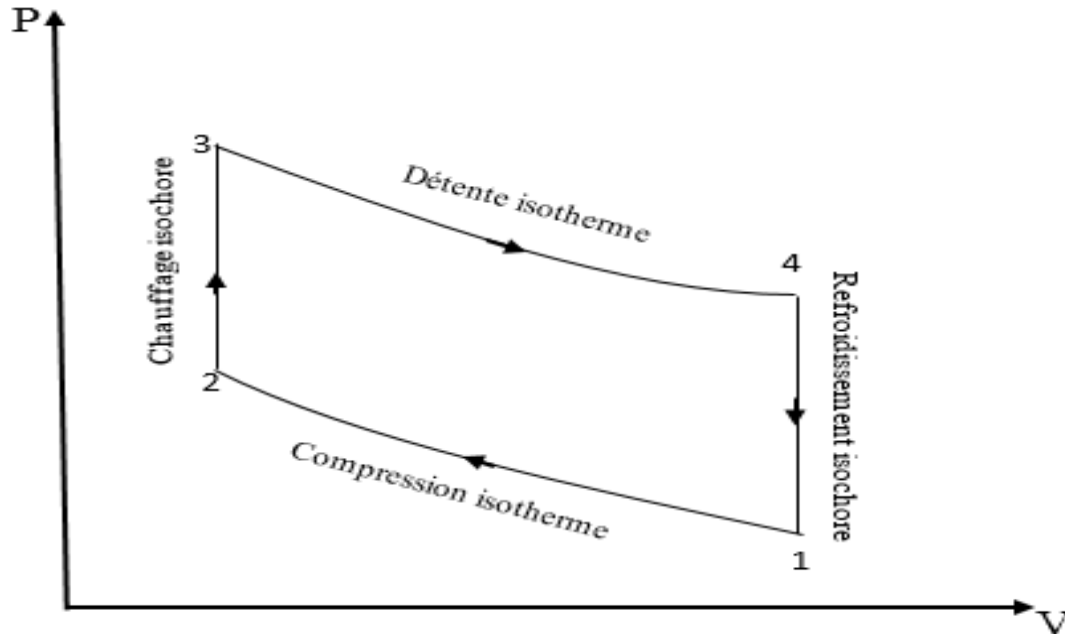
Le but du moteur Stirling est de produire l'énergie mécanique à partir d'une certaine quantité d'énergie thermique. Au début du cycle, le gaz à l'intérieur du moteur est placé dans la chambre chaude, chauffée par une source d'énergie : sa température et sa pression augmentent, ce qui produit une dilatation du gaz. Le piston de la chambre chaude étant en butée, le gaz se détend vers la chambre froide en repoussant le piston de celle-ci. L'énergie thermique est ainsi transformée en énergie mécanique. Lorsque le gaz est complètement transféré dans la chambre froide, le gaz se refroidit et son volume diminue, ce qui entraîne le mouvement du piston froid dans le sens inverse.

Le cycle thermodynamique de Stirling est inversible ce qui signifie que si un travail mécanique est fourni au moteur Stirling, il peut fonctionner comme une pompe à chaleur et fournir de la chaleur ou du froid (y compris du froid cryogénique). Ainsi un moteur Stirling entraîné par un autre moteur devient une pompe à chaleur capable de refroidir à  $-200^{\circ}\text{C}$  ou de chauffer à plus de  $700^{\circ}\text{C}$ , selon le sens d'entraînement [10]. Le but de la machine Stirling refroidisseur est donc de produire de la chaleur ou du froid. Le fluide de travail dans la machine Stirling refroidisseur subit également les quatre phases que sont : le chauffage isochore, la détente isotherme, le refroidissement isochore et la compression isotherme mais le sens du cycle et la succession des phases étant l'inverse du cas de moteur Stirling.

### **2.1.3 Le cycle Stirling théorique idéal du moteur Stirling**

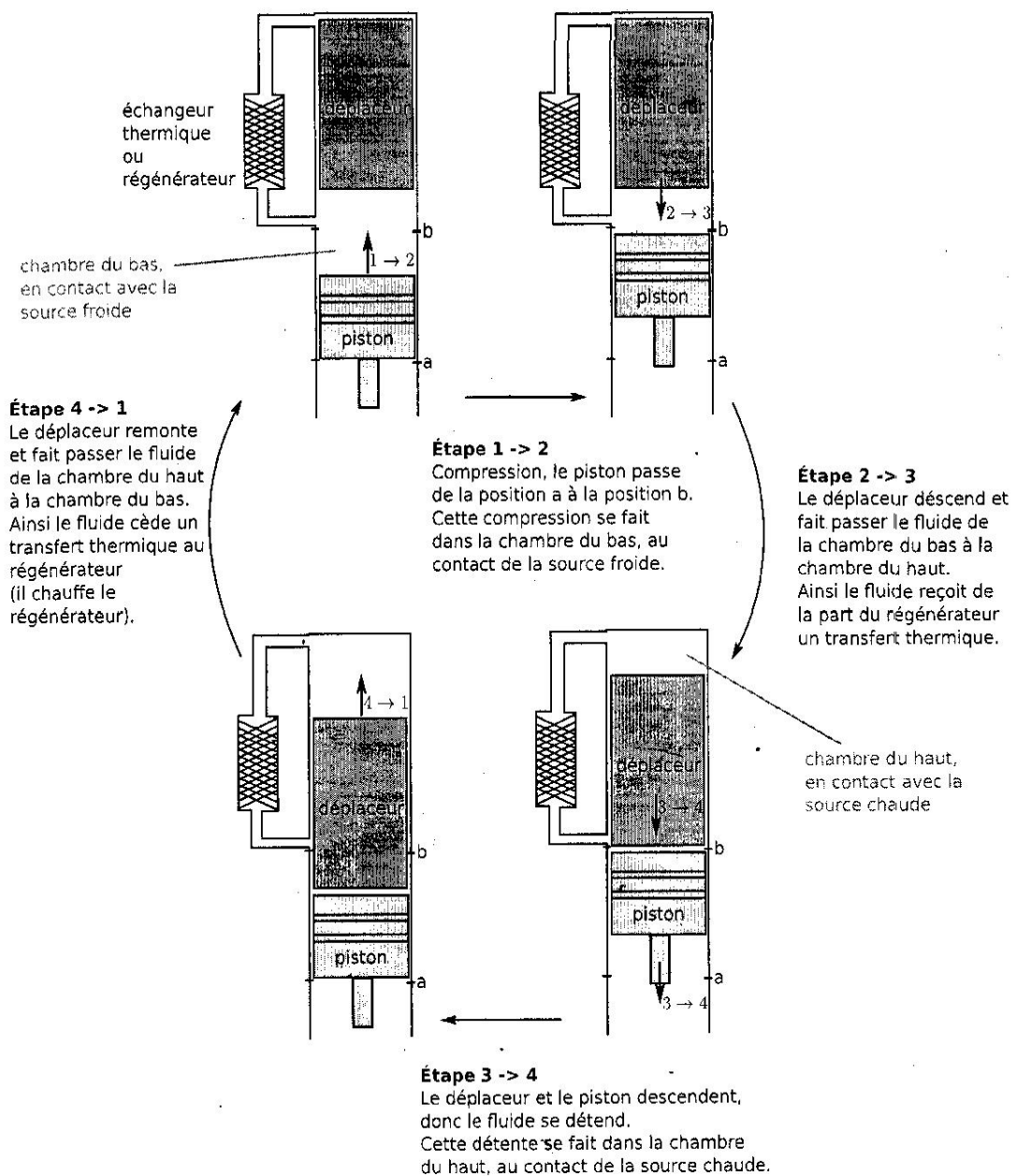
Le cycle de Stirling est le cycle thermodynamique décrit par les moteurs Stirling. L'ensemble des différents types de moteurs Stirling suit ce même cycle

thermodynamique sans la considération d'une configuration donnée. Le schéma ci-dessous (figure II-2) représente le cycle thermodynamique théorique de Stirling. Ce cycle comprend quatre (04) phases : chauffage isochore, détente isotherme, refroidissement isochore et une compression isotherme.



**Figure 2-3 :** Diagramme P-V du cycle idéal du moteur Stirling[11]

- L'étape 1-2 : compression isotherme (température constante). La zone de compression est refroidie, ainsi le gaz suit une compression isotherme.
- L'étape 2-3 : chauffage isochore. Le gaz est chauffé au niveau de la chambre chaude
- L'étape 3-4 : C'est la détente isotherme (température constante): le gaz a subit un chauffage au niveau de la chambre de détente, le gaz augmente donc en volume et subit une détente isotherme.
- L'étape 4-1 : refroidissement isochore (volume constant). Le gaz passe dans le régénérateur, se refroidit en lui transférant sa chaleur qui sera utilisée pour le cycle suivant.



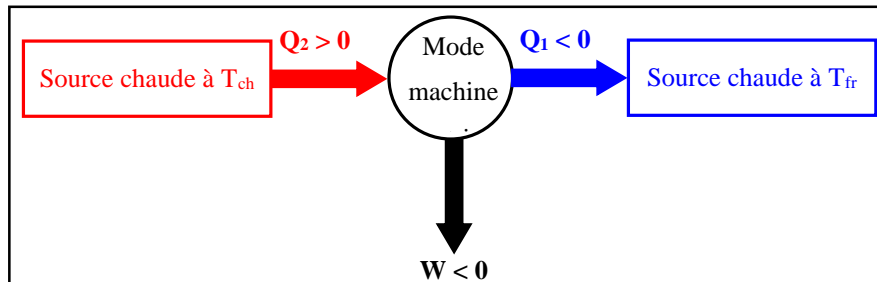
**Figure 2-4** : Différentes étapes du cycle Stirling [11]

Si la quantité de chaleur cédée par le fluide de travail au régénérateur durant la détente isochore est la même que celle reçue par le fluide lors de la compression isochore, c'est-à-dire si le régénérateur est parfait, alors le seul transfert de chaleur entre le moteur et l'environnement est :

- . l'apport de chaleur à la température de la source chaude  $T_{\max}$
- . le rejet de chaleur à la température de la source froide  $T_{\min}$

Cet apport et ce rejet de chaleur à températures constantes permettent au cycle de Stirling théorique d'avoir un rendement identique à celui du cycle de Carnot défini par :

$$\eta = 1 - \frac{T_{froid}}{T_{chaud}} \quad (1)$$



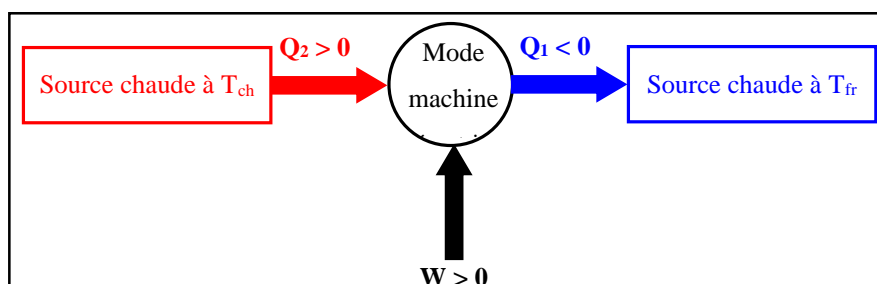
**Figure 2-5** : Fonctionnement d'un MSPL en pompe de chaleur

En mode récepteur, la machine est entraînée par un moteur électrique. Lorsque cette machine réceptrice Stirling tourne dans le sens trigonométrique, elle fonctionne en pompe à chaleur on peut dans ce cas calculer son coefficient de performance (COP) comme suit :

$$COP_{pompe} = \frac{\text{Chaleur fournie à la source chaude}}{\text{Travail dépensé}} = \frac{-\delta Q}{\delta W} \quad (2)$$

Lorsque cette machine réceptrice Stirling est entraînée dans le sens horaire, elle fonctionne alors en machine frigorifique. Dans ce cas, son COP (coefficient d'effet frigorifique) devient :

$$COP_{frigo} = \frac{\text{Chaleur retirée à la source froide}}{\text{Travail dépensé}} = \frac{\delta q}{\delta W} \quad (3)$$



**Figure 2-6** : Fonctionnement d'une MSPL en machine frigorifique

### 2.1.4 Cycle de Stirling

En réalité, le diagramme indicateur relevé expérimentalement sur un moteur Stirling (figure3.4) sera très sensiblement différent du diagramme théorique présenté précédemment. Il a une forme plus arrondie que ce dernier. Ceci est dû

essentiellement aux mouvements continus des pistons, différents des mouvements théoriques, aux grandes hétérogénéités de température instantanée dans le moteur et aux nombreuses irréversibilités présentes lors du fonctionnement du moteur [11]. Du fait du non uniformité du champ de température instantanée dans un moteur Stirling réel, on ne peut pas parler d'un cycle thermodynamique réel. Le travail mécanique produit résulte d'une infinité de cycles thermodynamiques différents subis par les particules fluides présentes dans le moteur. On remarque que l'aire du diagramme indicateur réel est plus petite que celle du diagramme indicateur théorique. Cette diminution a pour conséquence de réduire la puissance fournie par le moteur car le travail est représenté par l'aire du diagramme fermé.

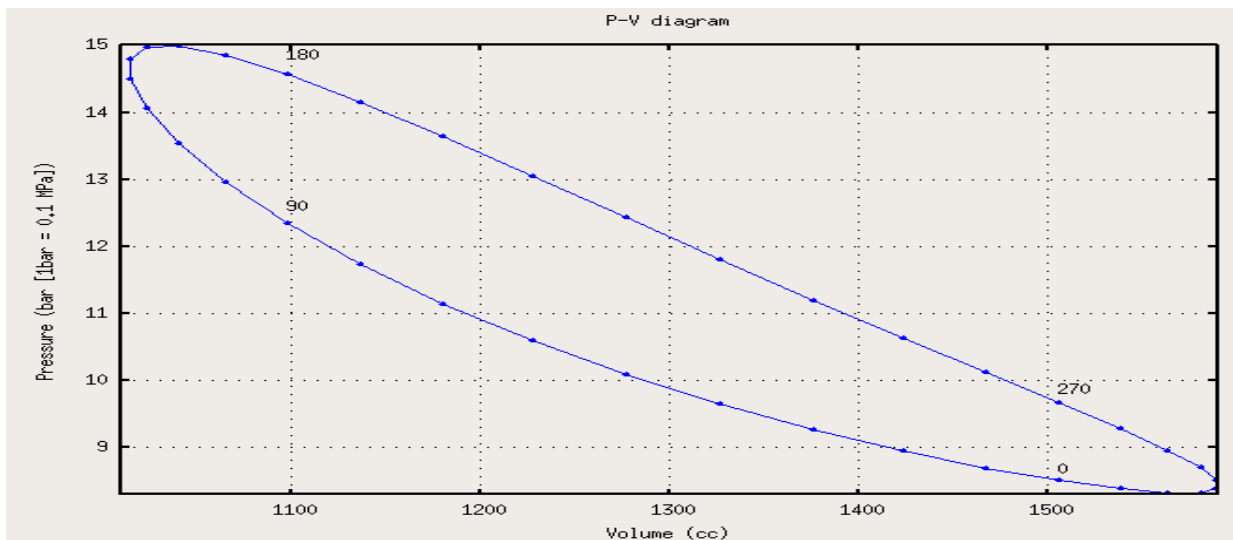


Figure 2-9 : Diagramme indicateur d'un moteur STIRLING réel [11]

### 2.1.5 Le régénérateur

Le régénérateur est un élément important d'une machine Stirling qui permet d'améliorer son rendement. Il permet de stocker de l'énergie thermique lorsque le fluide de travail dans la machine est déplacé de l'espace de détente vers l'espace de compression. Ainsi, le fluide est refroidit avant d'atteindre l'espace de compression. De même, le régénérateur transfère l'énergie thermique stockée au fluide de travail lorsque celui-ci passe de l'espace de compression à l'espace de détente. Le fluide de travail est donc préchauffé avant de passer dans l'espace de détente. Le régénérateur est un accumulateur de chaleur qu'on place entre la

source chaude et la source froide [12]. Il joue le rôle de préchauffage et de pré-refroidissement du fluide de travail augmentant ainsi le rendement de la machine.

Le régénérateur est constitué d'un matériau qui conduit facilement la chaleur et possède une aire de surface élevée, typiquement une maille de plaques métalliques minces, rapprochées[12]. Le régénérateur dans un moteur Stirling peut atteindre des rendements plus grands que de 98 %, ce qui indique le fluide de travail partira de la proximité du régénérateur à la température de l'espace qu'il occupe.[13]

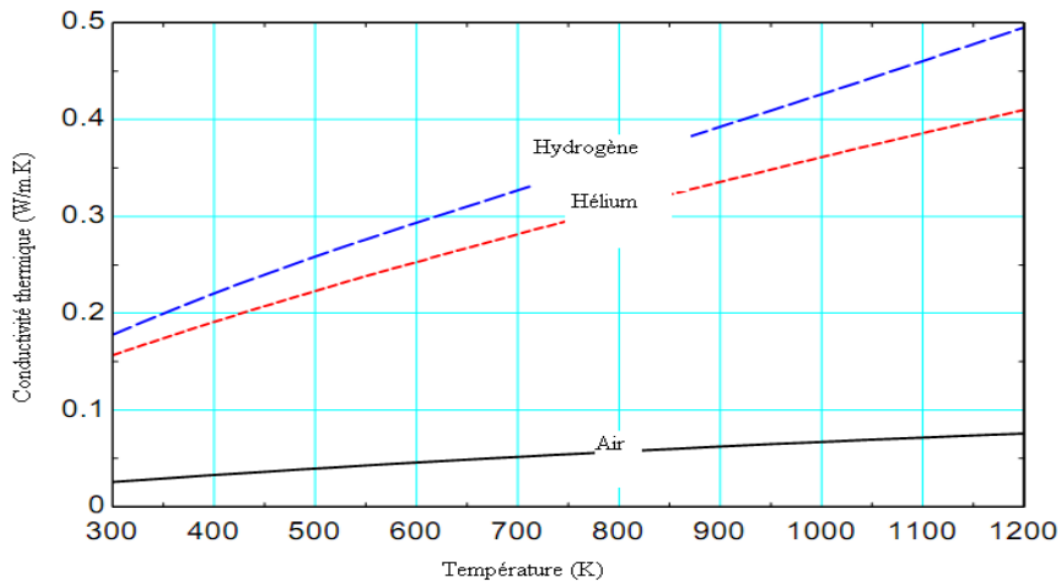
### **2.1.6 Le fluide de travail**

Pour son fonctionnement, la machine Stirling utilise un fluide de travail qui est constamment déplacé de la source chaude à la source froide et inversement grâce au déplaceur. Le choix de ce fluide de travail s'avère important et joue un rôle capital dans le rendement de la machine. Les fluides de travail les plus utilisés sont : l'air, l'hydrogène et l'hélium. Le choix d'un fluide de travail donné est basé sur les propriétés du fluide. Ces propriétés sont entre autre la conductivité thermique, la chaleur spécifique, la densité, la viscosité, etc...

Un fluide de travail avec une plus grande conductivité thermique, une densité et une chaleur spécifique plus élevée permettra d'améliorer les capacités de transfert de chaleur du gaz et l'efficacité des échangeurs de chaleur. Un fluide de travail avec une plus faible densité et une viscosité réduira la chute de pression à travers le régénérateur, l'aire de travail, et l'espace vide et il améliorera par conséquent le rendement du moteur.

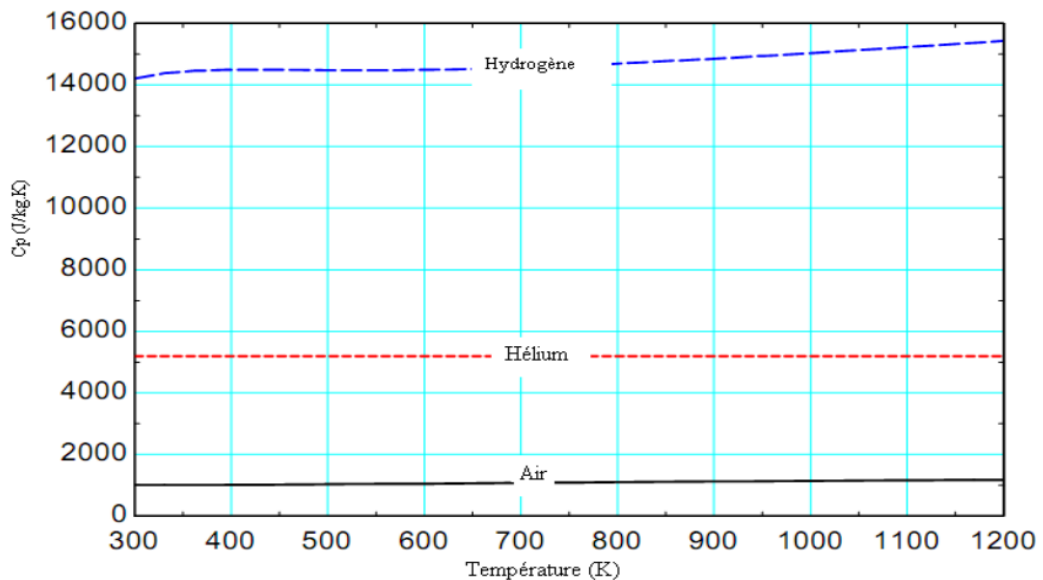
Le fluide de travail pour des moteurs Stirling d'une haute performance est souvent l'hydrogène ou l'hélium puisqu'ils ont une plus grande conductivité thermique et une capacité thermique par rapport à l'air suivant les indications des

figures ci-après :

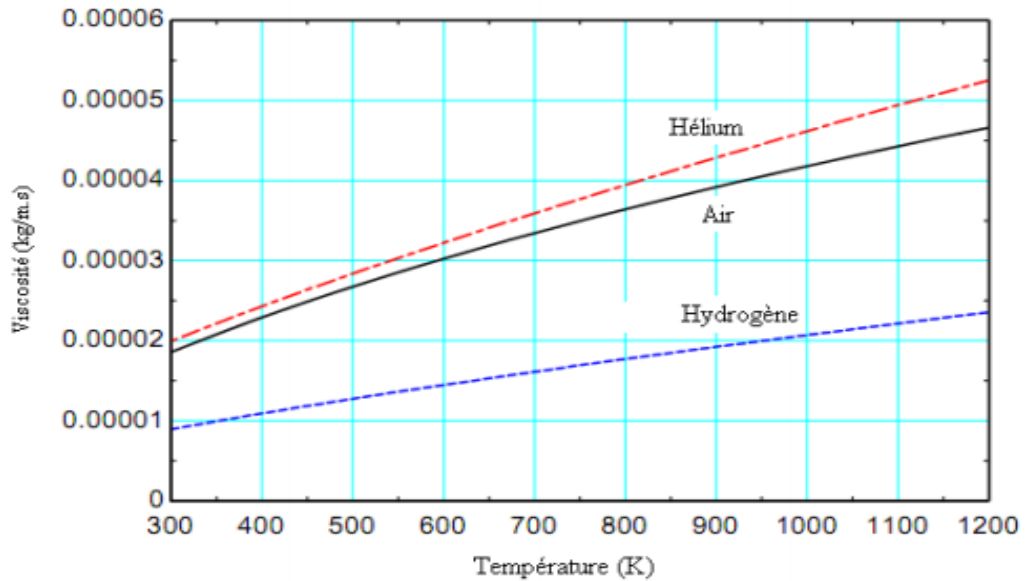


**Figure 2-10** : Conductivités thermiques des fluides de travail en fonction de la température [14]

La viscosité et la densité du fluide de travail jouent également un rôle important dans la perte de pression dans les aires de travail et dans le régénérateur. Un fluide de travail avec une faible viscosité et une faible densité aura comme conséquence l'amélioration du rendement thermique.



**Figure 2-11** : Conductivités thermiques des fluides de travail en fonction de la température [14]



**Figure 2-22** : Viscosités des fluides de travail en fonction de la température [14]

## 2.2 Modélisation numérique du moteur Stirling à piston libre

### 2.2.1 Description du modèle

Le schéma de la modélisation dynamique du MSPL est obtenu (figure 6) à partir d'une analogie mécanique avec un système à deux degrés de libertés [15] des liaisons ressort de raideur « K » et des amortisseurs visqueux « D » sont introduits entre les masses  $m_1$  du déplaceur et  $m_2$  du piston. Les matelas gazeux se comportent comme des ressorts avec dissipation. En guise de simplifier la modélisation, on suppose l'enveloppe externe du moteur immobile et de masse  $m_1$  largement supérieure aux autres masses en mouvement [16].

Dans le bilan des forces, il faut tenir compte l'action des forces de pression sur les faces des pistons qui varient au cours du temps. Pour déterminer la valeur de ces pressions qui dépendent du mouvement du piston  $x_p$  et du déplaceur  $x_d$ , il est nécessaire de coupler les équations thermodynamiques aux équations issues du schéma mécanique. Le modèle obtenu n'est pas linéaire. Pour calculer la pression interne du gaz, la loi des gaz parfaits est utilisée, la masse de gaz enfermé étant supposée connue.

## 2.2.2 Equations dynamiques du moteur Stirling

L'écriture du bilan des forces appliquées sur le piston et le déplaceur conduit à deux équations différentielles couplées liant les positions, vitesses et accélérations du piston et du déplaceur. Les forces en présence sur le piston sont les forces de pression, les forces de frottement mécanique sec, les forces dissipatives dues aux ressorts gazeux. Les forces en présence sur le déplaceur sont les forces de pression, de frottement mécanique sec, ainsi que les forces dissipatives dues aux ressorts gazeux (viscosité des gaz).

### 2.2.2.1 Hypothèses

Certaines hypothèses ont été faites [17] [18][19-20][21]

- transformation isotherme dans les volumes de compression et de détente,
- transformations adiabatiques dans les ressorts gazeux,
- mouvements sinusoidaux du piston et du déplaceur,
- la pression moyenne dans la machine peut être linéarisée (analyse de Schmidt)
- régénérateur parfait,
- pas de pertes thermiques (conduction ou rayonnement),
- pas de pertes mécaniques

### 2.2.2.2 Application de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton

La deuxième loi de Newton appliquée au piston et au plongeur conduit aux équations suivantes (6)

$$m_p \ddot{x}_p = A_p (P_c - P_p) - (C_{palt} + C_{HP}) \dot{x}_p \quad (4)$$

$$m_d \ddot{x}_d = A_d (P_e - P_c) + A_r (P_c - P_d) - C_H \dot{x}_p \quad (5)$$

$m_p$  et  $m_d$  sont les masses du piston et du déplaceur.

Les effets du champ gravitationnel sont négligés car ils sont assez petits par rapport aux effets des pressions impliquées dans la machine. L'alternateur est modélisé par une force visqueuse d'amortissement appliquée au piston. Les pertes d'hystérésis dans les ressorts à gaz sont modélisées comme les forces visqueuses appliquées au piston et au plongeur. Nous utilisons la pression dans l'espace de compression  $p_c$  comme pression de référence. Le gradient de pression entre l'expansion et l'espace de compression est:

$$\Delta p = p_e - p_c \quad (6)$$

où  $p_d$  se réfère à la pression dans le ressort à gaz du plongeur. Nous considérons que la perte de charge est principalement due à l'amortissement forces dans les échangeurs de chaleur et le régénérateur. Nous modélisons la perte de charge en fonction du piston et la vitesse du plongeur.

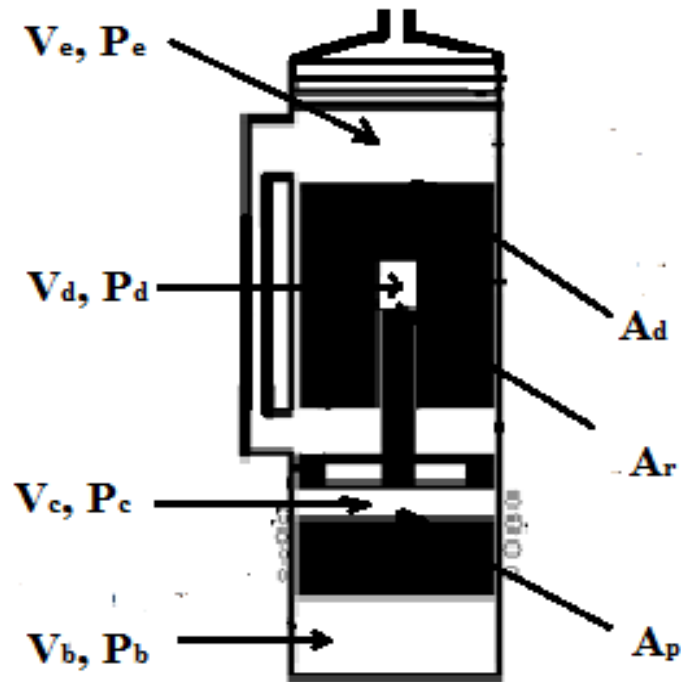
$$A_d \Delta p = C_p \dot{x}_p + C_d \dot{x}_d \quad (7)$$

Ces formulations de pertes conduisent aux équations dynamiques suivantes :

$$m_p \ddot{x}_p = A_p (P_c - P_p) - (C_{palt} + C_{HP}) \dot{x}_p \quad (8)$$

$$m_d \ddot{x}_d = C_p \dot{x}_p + (C_d - C_{Hd}) \dot{x}_d + A_r (P_c - P_d) \quad (9)$$

La variation du volume situe dans la partie chaude (partie proche du brûleur ou zone d'expansion des gaz) est liée au déplacement du déplaceur tandis que celle du volume de la partie froide (zone de compression des gaz) est liée aux deux déplacements du piston et du déplaceur, soit respectivement :



**Figure 2-33 :** Définition des volumes et surfaces de MSPL

### 2.2.2.3 Calcul de pression

Si la masse totale de gaz contenue dans la machine est connue, le principe de conservation rend possible dans le cadre de l'hypothèse de l'isotherme des volumes de gaz pour déterminer la pression dans la machine:[22]

$$P = \frac{m_g r}{\frac{V_c}{T_k} + \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_{reg}}{T_{reg}} + \frac{V_c}{T_h} + \frac{V_h}{T_h}} \quad (10)$$

La température moyenne dans le régénérateur  $T_{reg}$  est prise comme:

$$T_{reg} = \frac{(T_h - T_k)}{\ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)} \quad (11)$$

Durant le cycle, les variations de volumes sont :

$$V_e = A_d(x_d + x_{de}) \quad (12)$$

$$V_c = A_p(x_{pc} + x_p) - (A_d - A_r)x_d \quad (13)$$

Avec  $x_{de}$  la hauteur du volume détente (repos) et  $x_{pc}$  la hauteur du volume compression (repos) .

La pression peut s'écrire comme:

$$P = m_g r \left( S + \frac{A_p x_d - (A_d - A_r) x_d}{T_k} + \frac{A_d x_d}{T_h} \right)^{-1} \quad (14)$$

Avec

$$S = \frac{A_p x_{pc}}{T_k} + \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_{reg} \ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)}{(T_h - T_k)} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{A_d x_{de}}{T_h} \quad (15)$$

Ainsi, la pression peut être linéarisée et comme nous considérons l'espace de compression comme la pression de référence:

$$p_c = p_{mean} \left( 1 - \frac{A_p x_d - (A_d - A_r) x_d}{S T_k} - \frac{A_d x_d}{S T_h} \right) \quad (16)$$

Avec

$$p_{mean} = \frac{m_g r}{S} \quad (17)$$

#### 2.2.2.4 Calcul de la pression du ressort à gaz

Dans le volume du ressort à gaz, nous faisons l'hypothèse que la transformation est adiabatique: la variation de volume dans les ressorts à gaz dépend de la position du piston et du plongeur:

$$V_b = V_{b0} - A_p x_p \quad (18)$$

$$V_d = V_{d0} - A_r x_d \quad (19)$$

où  $V_{b0}$  et  $V_{d0}$  représentent les volumes des ressorts à gaz le piston et le plongeur sont à mi-course.

Donc, la pression l'expression est:

$$p_b = \frac{p_{mean} V_{b0}^\gamma}{(V_{b0} - A_p x_p)^\gamma} = p_{mean} \frac{1}{\left(1 - \frac{A_p}{V_{b0} x_p}\right)^\gamma} \quad (20)$$

$$p_d = \frac{p_{mean} V_{d0}^\gamma}{(V_{d0} - A_r x_d)^\gamma} = p_{mean} \frac{1}{\left(1 - \frac{A_r}{V_{d0} x_p}\right)^\gamma} \quad (21)$$

Avec l'hypothèse que le volume balayé est petit par rapport au volume initial du ressort à gaz, cette expression est linéarisé en:

$$p_b = p_{mean} \left( 1 + \gamma \frac{A_p}{V_{b0}} x_p \right) \quad (22)$$

$$p_d = p_{mean} \left( 1 + \gamma \frac{A_p}{V_{d0}} x_d \right) \quad (23)$$

En utilisant les calculs précédents, sous forme condensée : les équations de la dynamique s'écrivent :

$$\ddot{x}_p = K_{pp}x_p + K_{pd}x_d + D_{pp}\dot{x}_p + D_{pd}\dot{x}_d \quad (24)$$

$$\ddot{x}_d = K_{dp}x_p + K_{dd}x_d + D_{dp}\dot{x}_p + D_{dd}\dot{x}_d \quad (25)$$

Les coefficients notés K sont homogènes à des raideurs par unité de masse et les coefficients notés D sont des termes dissipatifs par unité de masse. Les valeurs des différents coefficients sont présentées dans le tableau 2.1

### 2.2.2.5 Perte de pression dans l'échangeur de chaleur

Les volumes instantanés de la chambre de détente et de compression peuvent s'exprimer par :

$$V_e(t) = A_d x_d(t) \quad (26)$$

$$V_c(t) = A_p x_p(t) - (A_d - A_r) x_d(t) \quad (27)$$

Le débit volumétrique à travers les échangeurs de chaleur est :

$$\dot{Q}_v = \dot{V} = \dot{V}_c - \dot{V}_e = A_p \dot{x}_p - (2A_d - A_r) \dot{x}_d \quad (28)$$

La vitesse d'écoulement à travers une surface A est :

$$u = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{A_p \dot{x}_p - (2A_d - A_r) \dot{x}_d}{A} \quad (29).$$

En supposant que les déplacements soient purement sinusoïdaux, en notation complexe,

$$x_d = x_{dmax} e^{i\omega t} \quad (30)$$

$$x_p = x_{pmax} e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (31)$$

où  $\omega$  est la pulsation du mouvement et  $\varphi$  la phase entre le déplaceur et le piston de travail.

Les vitesses du piston et du déplaceur dérivent des positions (27) et (28). Par conséquent, le débit volumétrique est:

$$\dot{V}_{max} = \omega \sqrt{A_p^2 x_{pmax}^2 - 2(2A_d - A_r)x_{dmax}A_p x_{pmax} \cos \varphi + (2A_d - A_r)^2 x_{max}^2} \quad (32)$$

Bien que la machine fonctionne sous inversion périodique, les conditions d'écoulement et une corrélation standard de facteur de friction de Darcy sont utilisées [23, 24]:

$$C_f = \begin{cases} \frac{64}{Re} & \text{si } Re \leq 2000 \text{ (écoulement laminaire)} \\ 0,316 Re^{-0,25} & \text{si } Re > 2000 \text{ (écoulement turbulent)} \end{cases} \quad (33)$$

En tenant compte du coefficient de perte de charge qui dépend de la configuration du canal d'écoulement, la perte de charge est calculée par la formule :

$$\Delta p = (C_f \frac{L}{d} + k_{hL}) \frac{\rho \mu^2}{2} \quad (34)$$

où L est la longueur de la chaîne, d est le diamètre hydraulique du canal,  $\rho$  et  $\mu$  sont la densité et la vitesse du fluide de travail et  $k_{hL}$  le coefficient de perte de charge dû aux effets de courbure, de contraction et d'expansion.

Pour linéariser l'expression(32), un paramètre d'amortissement linéaire équivalent est introduit, qui dissipe cette énergie en raison des pertes de charge.

Ainsi, les pertes de pression, exprimées à travers  $C_{eq}$  sont déterminées par la formule :

$$\Delta p = C_{eq} u \quad (35)$$

Dans ce cas, le coefficient est calculé à l'aide d'une expression qui utilise la vitesse maximale

$$C_{eq} = \frac{4}{3\pi} \rho u_{max} \left( C_f \frac{L}{d} + k_{hL} \right) \quad (34)$$

La valeur totale des pertes de charge dans le circuit d'échange thermique est déterminée par l'expression suivante :

$$\Delta p_{\Sigma} = \frac{4}{3\pi} \dot{V}_{max} [A_p \dot{x}_p - (2A_p - A_r) \dot{x}_d] \cdot \sum_{i=h,r,k} [\rho_i \left( C_f \frac{L}{d} + k_{hL} \right) \cdot \frac{1}{A_i^2}] \quad (36)$$

Où les indices  $i = h, r, k$  correspondent au réchauffeur, au régénérateur et au refroidisseur.

### 2.2.2.6 Amortissement visqueux du piston et du piston de travail

Les équations (4) et (35) permettent de calculer les dépendances pour le calcul des coefficients d'amortissement visqueux du plongeur  $C_d$  et du piston de travail  $C_p$ , en utilisant le coefficient  $B$  pour simplifier:

$$C_p = B A_d A_p \quad (37)$$

$$C_d = - B A_d (2A_d - A_r) \quad (38)$$

$$B = \frac{4}{3\pi} \dot{V}_{max} \sum_{i=h,r,k} [\rho_i \left( C_f \frac{L}{d} + k_{hL} \right) \cdot \frac{1}{A_i^2}] \quad (39)$$

### 2.2.2.7 Puissance utile

Le travail mécanique utile produit par la machine est calculé comme le travail de la force dissipative appliquée par l'alternateur linéaire. Sur un cycle ce travail est :

$$w_m = \oint C_{palt} \dot{x}_p dx \quad (40)$$

Après intégration le travail devient :

$$w_m = \pi C_{palt} \omega x_{pmax}^2 \quad (41)$$

La puissance utile mécanique nette du moteur est

$$P_m = \frac{1}{2} C_{palt} \omega^2 x_{pmax}^2 \quad (42)$$

### 2.2.2.8 Efficacité du moteur

Le modèle isotherme conduit aux équations suivantes :

$$Q_c = W_c = \oint p \frac{dV_c}{d\theta} d\theta \quad (43)$$

$$Q_e = W_e = \oint p \frac{dV_e}{d\theta} d\theta \quad (44)$$

$$\eta = \frac{W_m}{Q_e} \quad (45)$$

Cette efficacité ne prend en compte que les pertes dues aux chutes de pression, donc elle est plutôt proche de l'efficacité du Carnot.

### 2.2.3 Solutions des équations du modèle

Les équations différentielles du modèle à résoudre sont les équations (24) et (25). Les inconnues sont la position du déplaceur et du piston. Par conséquent, la fréquence de la machine, les courses du piston et du plongeur et l'angle de phase, ainsi que le volume mort sont également inconnus. Les expressions détaillées des coefficients sont données dans le tableau (2.1). Ces coefficients dépendent des quantités géométriques fixes telles que des surfaces ou des masses, des paramètres de fonctionnement fixes tels que des pressions moyennes ou des grandeurs de températures qui peuvent varier car elles dérivent des positions :

- le paramètre  $S$  dépend des volumes morts (si la course est réduite, l'espace libre et le volume mort augmentent proportionnellement).
- Les paramètres de dissipation sont liés au débit dans la machine par les pertes de charge. Le débit volumique dépend de la fréquence de la machine, des courses du piston et du plongeur et de l'angle de phase entre le plongeur et le piston.

Ainsi, les coefficients d'équation dépendent des résultats de l'équation et le système est non linéaire. Pour le résoudre, nous utilisons une procédure itérative détaillée ci-dessous. Nous calculons d'abord les coefficients d'équation et résolvons les équations différentielles avec un ensemble possible de valeurs pour la fréquence, la course et l'angle de phase. A partir du résultat, nous calculons les valeurs réelles de fréquence, de course et d'angle de phase. Nous répétons cette opération jusqu'à ce que les erreurs entre les valeurs soient inférieures à 5%. La convergence du processus n'est pas assurée, donc, nous essayons parfois différents points de départ parmi des valeurs de machines réalistes.

### 2.2.4 Raideur et matrice d'amortissement

La dynamique du système oscillatoire du MSPL, qui comprend une masse, un ressort à gaz et un amortisseur, s'écrit sous la forme d'un système d'équations différentielles:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pd} & D_{pp} & D_{pd} \\ K_{dp} & K_{dd} & D_{dp} & D_{dd} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_p \\ x_d \\ \dot{x}_p \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} \quad (46)$$

Les coefficients de rigidité K, qui dépendent des paramètres géométriques et de fonctionnement fixes du moteur, restent constants tout au long du fonctionnement du moteur, et les coefficients d'amortissement D dépendant des pertes de charge, de la fréquence du moteur, de la course et de l'angle de déphasage du piston, sont déterminés selon les formules suivantes (Urieli, 1984):

**Tableau 2-1** : Expressions des coefficients de raideur et coefficients dissipatifs

coefficients de raideur	Coefficients dissipatifs
$K_{pp} = -\frac{A_p^2 P_{moy}}{m_p} \left( \frac{1}{T_k S} + \frac{\gamma}{V_{bo}} \right)$	$D_{pp} = -\frac{(C_{palt} + C_{HP})}{m_p}$
$K_{pd} = \frac{A_p P_{moy}}{m_p S} \left( -\frac{A_d}{T_k} + \frac{(A_d - A_r)}{T_k} \right)$	$D_{pd} = 0$
$K_{dp} = -\frac{1}{m_d} \frac{A_r A_p P_{moy}}{T_k S}$	$D_{dp} = \frac{C_p}{m_d}$
$K_{dd} = -\frac{A_r P_{moy}}{m_d} \left( \frac{A_d}{ST_k} - \frac{(A_d - A_r)}{ST_k} + \gamma \frac{A_r}{V_{bo}} \right)$	$D_{dd} = \frac{1}{m_d} (C_d - C_{Hd})$

Les coefficients  $C_p$ ,  $C_d$ ,  $C_{HP}$ ,  $C_{Hd}$  sont liés aux pertes de charge ainsi qu'aux pertes par hystérésis dans les ressorts gazeux.

### 2.2.5 Stabilité : valeurs propres

En fonctionnement, les oscillations de la machine doivent être auto-entretenues. L'équation d'état pour le système dynamique (46) s'écrit sous la forme suivante :

$$[X] = \begin{bmatrix} x_p \\ x_d \\ \dot{x}_p \\ \dot{x}_d \end{bmatrix}; \quad (47)$$

$$[\dot{X}] = [M][X]; \quad (48)$$

Avec

$$[M]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_{pp} & K_{pd} & D_{pp} & D_{dp} \\ K_{dp} & K_{dd} & D_{dp} & D_{dd} \end{bmatrix} \quad (49)$$

L'analyse des valeurs propres de  $[M]$  permet de savoir si les oscillations sont auto-entretenues [25]. En effet les solutions de l'équation différentielle peut se mettre sous la forme : selon PRADIN et GARCIA

$$[X(t)]=e^{[M]t}[X_0]=[N]e^{[\Lambda]t}[N]^{-1}[X_0] \quad (50)$$

$$e^{[\Lambda]t}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \\ & e^{\lambda_4 t} \end{bmatrix} \quad (51)$$

$[X_0]$  condition initiale de  $[X]$ ,  $\lambda$  valeurs propres de la matrice  $[M]$  et  $[N]$  est la matrice composée des vecteurs propres de  $[M]$ .  $[N]$  est la matrice de passage de  $[M]$  à sa forme diagonalisée.

Les solutions sont une combinaison linéaire de termes comme  $e^{at} \cos wt$  avec un correspondant à la valeur propre partie réelle et  $w$  la partie imaginaire

Pour obtenir des oscillations auto-entretenues, les conditions suivantes doivent être remplies :

- les valeurs propres doivent être une paire de valeurs propres conjuguées imaginaires pures ( $a$  est zéro et seul le terme cosinus demeure)
- les autres valeurs propres doivent avoir deux parties réelles négatives ( $a$  est négatif, le terme est un transitoire court qui décline rapidement)

Les valeurs propres conjuguées imaginaires pures représentent le mode oscillant et les valeurs propres de la partie réelle négative un terme transitoire. Les valeurs réelles négatives doivent être suffisamment grandes pour assurer un déclin rapide du terme transitoire.

## CHAPITRE III : RESULTATS ET DISCUSSION

### 3.1 Validation du modèle

#### 3.1.1 Comparaison avec les résultats expérimentaux de Monsieur François LANZETA et Madame Sylvie BEGOT.

Monsieur François LANZETTA et Madame Sylvie BEGOT ont réalisé une la modélisation d'une machine Stirling dont les principales caractéristiques sont présentées dans le tableau 3.1. Avec ces paramètres, on impose une puissance mécanique de 1200W par l'intermédiaire d'un coefficient de frottement visqueux appliqué sur le piston. Les coefficients des équations différentielles obtenus après itérations sont présentés dans le tableau 3.2. Les valeurs propres sont présentées dans le tableau 3.3. La machine se place dans un régime d'oscillations auto-entretenues de fréquence 21 Hz. Le rapport entre le déplacement du déplaceur et celui du piston est de 1,4. Le déphasage entre le piston et le déplaceur est de 60°.

**Tableau 3-1 : Principales caractéristiques de la MSPL**

Masse piston	Masse déplaceur	Diamètre piston/déplaceur	Volume éch.chaud/froid	Volume régénérateur
kg	Kg	m	$m^3$	$m^3$
6	0,2	0,04	$3 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$
Porosité régénérateur	Température chaude	Température froide	Gaz	Pression moyenne
	K	K		Pa
0,7	810	320	Hélium	$7,1 \cdot 10^6$
Course max.piston	Hauteur volume comp.repos	Hauteur volume Détente au repos	Volume ressort gazeux piston	Volume ressort gazeux Déplaceur
m	M	m	$m^3$	$m^3$
0,03	0,03	0,015	0,00146	$3,5 \cdot 10^{-5}$

**Tableau 3-2 : Coefficients des équations différentielles**

$K_{pp}$	$K_{pd}$	$D_{pp}$	$D_{pd}$
$s^{-2}$	$s^{-2}$	$s^{-1}$	$s^{-1}$
$-2,6.10^4$	$1,1.10^4$	$-100$	$0$
$K_{dp}$	$K_{pd}$	$D_{dp}$	$D_{dd}$
$s^{-2}$	$s^{-2}$	$s^{-1}$	$s^{-1}$
$-9,9.10^4$	$-6100$	$289$	$-557$

La matrice M devient :

$$[M]= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2,6.10^4 & 1,1.10^4 & -100 & 289 \\ -9,9.10^4 & -6100 & 289 & -557 \end{bmatrix}$$

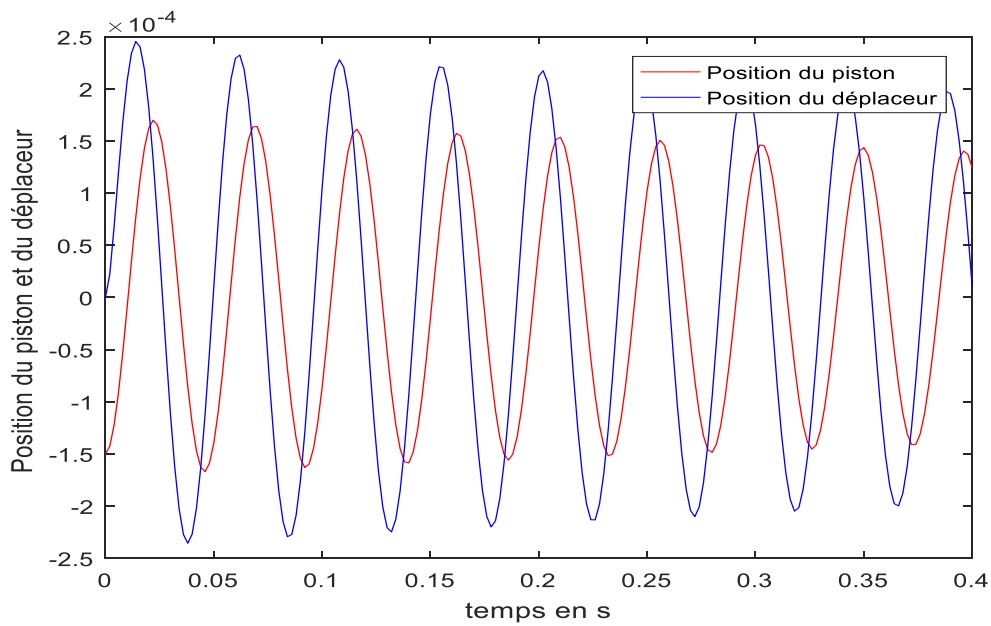
La détermination des valeurs propres avec le logiciel MATLAB conduit aux valeurs :

**Tableau 3-3 : Valeurs propres de la matrice**

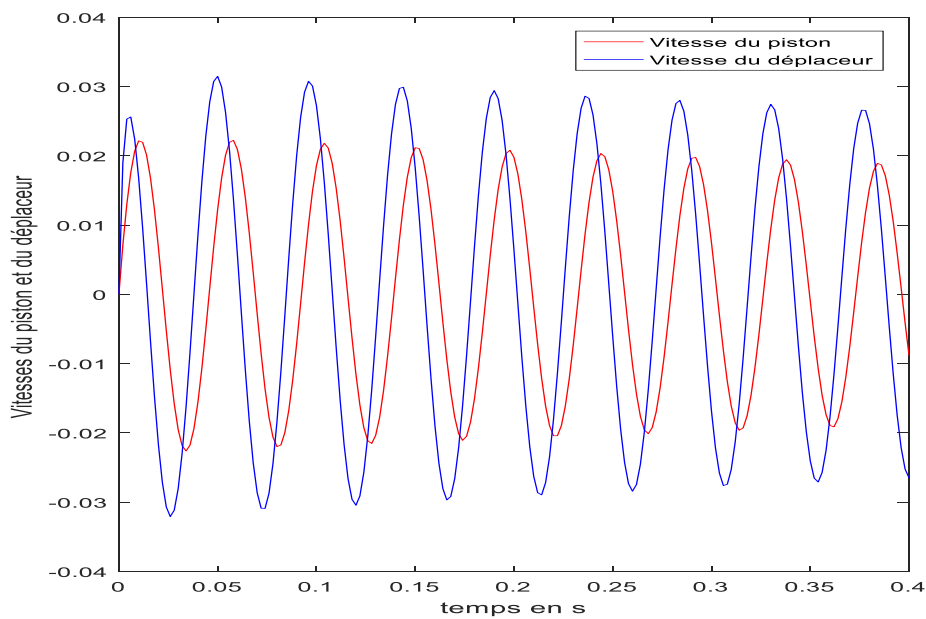
Valeur propres
-524
-131,81
-0,49 +134i
-0,49 - 134i

Grace au logiciel MATLAB, nous avons grâce à une programmation dont le script se trouve en annexe

La figure 3.1 présente les positions du piston et déplaceur sur 0,4s à partir du démarrage supposé à température et pression nominales. Le piston est supposé être écarté au démarrage de sa position de repos de 0,15mm. On constate que les régimes transitoires sont très brefs et que le régime d'oscillations auto-entretenues s'installe très rapidement.



**Figure 3-1** : Courbes représentatives des positions du déplaceur et du piston



**Figure 3-2** : Courbes représentatives des vitesses du déplaceur et du piston

Cette étude permet de valider notre modèle car les courbes obtenues correspondent aux tracées par ces chercheurs lors de leurs travaux.

### 3.2 Discussion

Nous avons étudié les effets des deux catégories de paramètres à savoir  $K_{pp}$ ,  $K_{pd}$ ,  $K_{dp}$ ,  $K_{dd}$  caractérisant les raideurs par unité de masse des ressorts figurant dans le modèle et  $D_{pp}$ ,  $D_{pd}$ ,  $D_{dp}$ ,  $D_{dd}$  représentant les coefficients dissipatifs par unité de masse.

Les valeurs de ces paramètres sont introduites dans la matrice M qui régit le fonctionnement du moteur. Des valeurs propres de cette matrice découle l'analyse de la stabilité du fonctionnement du moteur.

Pour la simulation faite, les résultats obtenus ont conduit à l'obtention des courbes de la figure 3.1 représentant l'évolution des positions du piston et du déplaceur en fonction du temps. On constate que les différentes l'évolution des différentes positions du piston et du déplaceur est une fonction sinusoïdale du temps. Ce qui témoigne de la stabilité dans le fonctionnement du moteur.

Sur la figure 3.2, nous avons représenté l'évolution des vitesses du piston et du déplaceur en fonction du temps à partir de valeurs initiales données. On constate que ces vitesses ont une évolution sinusoïdale caractérisant la stabilité du fonctionnement du moteur.

## **Conclusion générale**

La modélisation du moteur de Stirling à pistons libres nous a permis d'identifier les paramètres qui influencent son fonctionnement, paramètres sur lesquels il faut agir pour avoir la stabilité du moteur.

Il urge d'effectuer des études plus approfondies sur les différents éléments du moteur en vue de sa performance. Il s'agit des éléments ou parties du système tels que :

- le gaz,
- la masse du piston et celle du déplaceur,
- les frottements paroi- piston,
- le régénérateur.

## Référence bibliographique

- [1] ONOVWIONA, HI, UGURSAL, VI Residential cogeneration systems reviews of the current technology, renewable and sustainable energy Reviews, pp 1-43 July (2004)
- [2] W. T. Beale et G. Chen, « Small Stirling Free Piston Stirling Engines for Cogeneration », Sunpowerinc., Athens. 1992.
- [3] W. Beale, 'stirling Cycle Type Thermal Device' US patent 355220, 1971
- [4] N. ulusoy and F. Mc Caughan, 'Nonlinear Analysis of free piston Stirling Engine/Alternator System' Proceedings of 29<sup>th</sup> Intersociety Energy Conversion Engineering Conference, Vol. 4, pp. 1847-1952, 1994.
- [5] K. ZAOUI et F. TALBI ALAMI, «L'application de l'énergie solaire au moteur Stirling».
- [6] M. Sa'ed A. et T. Iskander, «Numerical Investigation of Working Fluid Effect on,» *Int. J. of Thermal & Environmental Engineering*, vol. 10, n° 11, pp. 31-36, 2015.
- [7] F. de Monte, G. Benvenuto, J. propuls. Power 14. 499 (1998)
- [8] F. de Monte, G. Benvenuto, J. propuls. Power 14. 509 (1998)
- [9] Beale. W. T free-Piston Stirling Engines-Some Model Tests and simulations, International Automotive Engineering Congress Detroit, paper
- [10] **M. Sa'ed A. et T. Iskander**, «Numerical Investigation of Working Fluid Effect on,» *Int. J. of Thermal & Environmental Engineering*, vol. 10, n° 11, pp. 31-36, 2015.
- [11] [www.robert-stirling.com](http://www.robert-stirling.com)
- [12] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Moteur\\_Stirling](https://fr.wikipedia.org/wiki/Moteur_Stirling), 19 juillet 2017.
- [13] K. Benabdelaziz, «Étude de la technologie solaire Dish-Stirling,» 2013.
- [14] K. Abdelmadjid, «Modélisation et simulation d'un concentrateur parabolique solaire à moteur Stirling en vue d'un rendement optimal,» 2013.

- [15] K. Abdelmadjid, «Modélisation et simulation d'un concentrateur parabolique solaire à moteur Stirling en vue d'un rendement optimal,» 2013.
- [16] Urielli. BERSCHOWITZ D.M Stirling Cycle Engines analysis. British Library Cataloguing in publication Data, ISBN (1984)
- [17] DE MONTE F. BENVENUTO G. Reflections on Free- Piston Stirling Engines. Part 1 Cyclic Steady operation J of free propulsion and Power , pp 499-508 , July –August (1998)
- [18] DE MONTE F. BENVENUTO G. Reflections on Free- Piston Stirling Engines. Part 2 Cyclic Steady operation J of free propulsion and Power , pp 508-518 , July –August (1998)
- [19]ROGDAKIS. E. D BORMPILAS N. A et KONIAKOS IK A thermodynamic study for the optimization of stable operation of free piston Stirling engines. Energy conversion and Management , 45, (4), pp 575-593,(2004).
- [20] E.D. Rogdakis, N.A . Bormpilas, IK Koniakos, A thermodynamic study for the optimization of stable operation of free piston Stirling engines. Energy conversion Manage. 45 (4)
- [21] F. Formosa, coupled thermodynamic-dynamic semi-analytical model of free piston Stirling engines, Energy conversion and Management 52 (2011) 2095-2109
- [22] Sylvie Bégot, Guillaume Layes, Francois Lanzetta Stability analysis of free piston Stirling Eur.phy.J.Appl.Phys.(2013) 61:30901
- [23] W. R. Martini, Stirling Enging Design Manuel , NASA CR 168088
- [24] W.M. Kays, A.L. London, Compact Heat Exchngrs(McGraw-Hill, New York, 1964)
- [25] S. Begot, G. Layes, F. Lanzetta, S. Djetel, P. Nika, R. Contreau , Modèle pour conception /optimisation d'un moteur Stirling à pistons libres

« mécanique » , Actes du congrès de la société Française de Thermique,  
Perpignan, 24-27 Mai (2011).

## Annexe : Script de MATLAB utilisé pour la programmation

```

=====
% Ce programme permet de modéliser le fonctionnement d'un moteur Stirling à
pistons libres
%*****
% Utilisation:
%*****
% ENTREE:
%     -Les coefficients de la matrice de rigidité: K_pp,K_pd,K_dp,K_dd
%     -Les coefficients de la matrice de d'amortissement:
D_pp,D_pd,D_dp,D_dd
%     -condition intiale Xo (vecteur 4x1)
%     -temps de mesure tf en s
%     -nombre de subdivisions nt de l'intervalle de temps
% SORTIES:
%     Solution X c(matrice 4*(nt+1)) contenant:
%         -les positions succesives du piston dans le temps (1ère
ligne)
%         -les positions succesives du déplaceur dans le temps (2ème
ligne)
%         -les vitesses succesives du piston dans le temps (3ème ligne)
%         -les vitesses succesives du déplaceur dans le temps (4ème
ligne)
%=====
% Auteur: Euphraïm Sourou DADE
%=====
clear all
clc
%Définition des entrées du programme
K_pp=-2.6e04;%A définir
K_pd=1.1e4;%A définir
K_dp=-9.9e4;%A définir
K_dd=-6100;%A définir
D_pp=-100;%A définir
D_pd=0;%A définir
D_dp=289;%A définir
D_dd=-557;%A définir
Xo=[-1.5e-4;(1.5e-4)*0;0;0];%condition intiale à définir
tf=0.4; %temps de mesure en s
nt=200;%nombre de subdivisions de l'intervalle de temps
%définition du vecteur contenant les temps discrets
t=linspace(0,tf,nt+1);
% Définition de la matrice de rigidité K
K=[K_pp K_pd;K_dp,K_dd];
% Définition de la matrice des amortissements D
D=[D_pp D_pd;D_dp,D_dd];
% Définition de la matrice M
M=[zeros(2,2) eye(2);K D];
% Calcul des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice M
[Vect_pr,Val_pr]=eig(M);
% Définition de la matrice N
N=Vect_pr;
% Extraction des valeurs propres
lamb=[Val_pr(1,1);Val_pr(2,2);Val_pr(3,3);Val_pr(4,4)];
% Résolution de l'équation
X=zeros(4,nt+1);%Formatage de la solution
J=zeros(4,4);%Formatage de la matrice J
X(:,1)=Xo;%condition initiale
for k=2:nt+1
    tk=t(k);
    J=diag(exp(lamb.*tk));
%     J=exp(Val_pr.*tk);
%     X(:,k)=N*J*inv(N)*Xo;
    X(:,k)=N*J*(N\Xo);
end

```

```
disp(X)
figure
plot(t,X(1,:), 'r',t,X(2,:), 'b')
xlabel('temps en s');ylabel('Position du piston et du déplaceur ')
legend('Position du piston','Position du déplaceur')
figure
plot(t,X(3,:), 'r',t,X(4,:), 'b')
xlabel('temps en s');ylabel('Vitesses du piston et du déplaceur ')
legend('Vitesse du piston','Vitesse du déplaceur')
```